AIY3310 Diskreetne matemaatika

Lühikonspekt

Käesolev lühikonspekt katab suure osa aines AIY3310 (endise koodiga LIY3310) loetavast. Samal ajal ei saa seda materjali vaadelda kui antud aine täiskonspekti, mille läbitöötamine garanteeriks hea eksamiresultaadi.
Loengutes ja harjutustundides käsitletakse mitmeid probleeme tunduvalt põhjalikumalt.
Sellest hoolimata usun, et antud kirjutisest on paljudele tudengitest lugejatele kasu valmistumisel kontrolltööks ja eksamiks.

Margus Kruus

HULGATEOORIA PÕHIMÕISTEID

HULK - algmõiste, intuitiivse definitsiooni järgi objektide kogum.
George Cantor (1845-1918) - saksa matemaatik, hulgateooria rajaja.

Hulgad jaotuvad lõpmatuteks ja lõplikeks. Meie kursuses käsitletakse lõplikke hulki, mõnikord ka lõpmatuid loenduvaid hulki.

Hulgateoreetilised operatsioonid

- Hulkade ühend

$A \cup B = \{ x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \}$

- Hulkade ühisosa (lõige)

$A \cap B = \{ x \mid (x \in A) \ \& \ (x \in B)$

- Hulga täiend

$\overline{A} = \{ x \mid (x \in I) \ \& \ (x \notin A) \}$, kus I on nn. universaalhulk.

- Hulkade vahe

$A \setminus B = \{ x \mid (x \in A) \ \& \ (x \notin B) \}$

- Hulkade sümmeetriline vahe

$A \Delta B = \{ x \mid ((x \in A) \ \& \ (x \notin B)) \vee ((x \notin A) \ \& \ (x \in B)) \}$

Hulga A astmehulgaks 2^A nimetatakse hulga A kõigi alamhulkade hulka.

Hulgateoreetiliste operatsioonide omadused

- Kommutatiivsusseadused

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

- Assotsiatiivsusseadused

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- Distributiivsusseadused

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- De Morgani seadus seadused

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- Idempotentsusseadus

$A \cap A = A \cup A = A$

- Välistatud kolmanda seadused

$A \cup \overline{A} = I$
$A \cap \overline{A} = \varnothing$

- Topelttäiendi seadus

$\overline{\overline{A}} = A$

- $A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cap I = A$ $A \cup \varnothing = A$ $A \cup I = I$
- Neeldumisseadused

$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$
$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

- Kleepimisseadused

$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$
$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$

- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

<u>Hulkade võimsus ja Grassmani valemid</u>

Lõpliku hulga A võimsuseks nimetame selle hulga elementide arvu (tähistame $|A|$).
Grassmani valemid võimaldavad arvutada hulkade ühendi võimsust:
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

<u>Ülesandeid</u>

- Kas kehtivad järgmised hulgateoreetilised võrdused:

$B = \overline{(A \cup B)} \cap (A \setminus B)$
$\overline{\overline{(A \cup B)}} \cap \overline{\overline{A}} = A \setminus ((A \setminus B) \cap \overline{(A \cup B)})$
$\overline{A} \cup (\overline{B} \setminus \overline{C}) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A \cap \overline{C})$
$A \setminus (A \cap B) = \overline{B} \setminus \overline{A}$

- Leida hulk X, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

$$\begin{cases} A \setminus X = B \\ A \cup X = C \\ B \subset A \subset C \end{cases}$$

- Tõestada, et järgmised võrdused kehtivad:

$A\Delta(A \cap B) = A \setminus B$

$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

- Lihtsustada hulgateoreetilised avaldised, esitada Cantori normaalkujul:

$((A \setminus B) \cup (A\Delta B) \cup (A \setminus C)) \cap \overline{A} = ?$

$A \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = ?$

$(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) = ?$

$(\overline{\overline{(A \setminus B)} \cap \overline{(B \setminus C)}} \cup \overline{(C \setminus A)} = ?$

- Millistel lisatingimustel kehtivad järgmised võrdused?

A \ B = B \ A

A Δ B = B \ A

- Viidi läbi küsitlus 100 tudengi hulgas (huvialade jaotus). Vastuste analüüs näitas: 28 tudengit pidasid oma huvialaks kunsti, 30 tudengit - muusikat ja 42 tudengit - sporti. 10 tudengit tundis huvi nii kunsti kui spordi, 5 tudengit - kunsti ja muusika ning 8 tudengit spordi ja muusika vastu. Nende hulgast 3 tudengit ütles ennast huvi tundvat kõigi kolme ala vastu. Kui palju tudengeid tunneb huvi ainult spordi vastu? ainult muusika vastu? mitte ühegi vastu nimetatud kolmest alast.
- Tudengirühmas on 25 inimest. Eksamieelduseks on saada kahe kontrolltöö arvestused. Esimesel kontrolltööl sai arvestuse 20 tudengit, teisel 21 tudengit. Kui palju tudengeid (minimaalselt ja maksimaalselt) pääseb eksamile?
- Vanal ajal toimunud lahingus sai palju sõdalasi kannatada. 70% lahingust osavõtjatest kaotas lahingus silma, 75% - kõrva, 80% - käe ja 85% - jala. Kui palju sõdalastest (minimaalselt ja maksimaalselt) jäi ilma nii silmast, kõrvast, käest kui ka jalast?
- Füüsika-matemaatika teaduskonna iga tudeng tunneb huvi kas füüsika või matemaatika vastu. Kui palju tudengitest tunneb huvi mõlema ala vastu, kui on teada, et matemaatikahuvilisi on 84% ja füüsikahuvilisi - 64%?
- Hulk A koosneb naturaalarvudest 1 kuni 1000. Leida, mitu hulga A elementi ei jagu ei kolmega ega viiega.

VASTAVUSED

Antud 2 hulka A ja B ning reegel, kuidas hulga A elemendid on vastavuses φ hulga B elementidega.

$\varphi \subset A \times B \quad \varphi : A \to B$

Vastavuse määramispiirkond (domain):

$D(\varphi) = \{ a \mid \exists\ b\ (\langle a,b\rangle \subset \varphi) \}$

Vastavuse muutumispiirkond (range):

$R(\varphi) = \{ b \mid \exists\ a\ (\langle a,b\rangle \subset \varphi) \}$

Vastavuse täiend:

$\bar{\varphi} = \{ \langle a,b\rangle \mid \langle a,b\rangle \notin v \} \qquad |\bar{\varphi}| = |AxB| - |\varphi|$

Pöördvastavus:

$\varphi^{-1} = \{ \langle b,a\rangle \mid \langle a,b\rangle \in \varphi \} \subset BxA \quad |\varphi^{-1}| = |\varphi|$

Vastavuste ühend ja ühisosa:

$\varphi_1 \cap \varphi_2 = \{ \langle a,b\rangle \mid \langle a,b\rangle \in \varphi_1\ \&\ \langle a,b\rangle \in \varphi_2 \}$

$\varphi_1 \cup \varphi_2 = \{ \langle a,b\rangle \mid \langle a,b\rangle \in \varphi_1\ V\ \langle a,b\rangle \in \varphi_2 \}$

Vastavuste kompositsioonitehe:

$\varphi_1\ o\ \varphi_2 = \{ \langle a,c\rangle \mid \exists\ b\ (\langle a,b\rangle \in \varphi_1\ \&\ \langle b,c\rangle \in \varphi_2) \}$,kus

$\varphi_1 \subset AxB$ ja $\varphi_2 \subset BxC$.
Kompositsioonitehe on assotsiatiivse iseloomuga.

Vastavuste klassifikatsioon
Vastavus $\varphi \subset AxB$ on kõikjal määratud, kui $D(\varphi) = A$.
Vastavus $\varphi \subset AxB$ on kõikjale määratud, kui $R(\varphi)=B$.
Vastavus $\varphi \subset AxB$ on ühene, kui $\varphi^{-1} \circ \varphi \subset \{ \langle b,b \rangle \mid b \in B \}$.
Vastavus $\varphi \subset AxB$ on üks-ühene, kui $\varphi^{-1} \circ \varphi \subset \{ \langle b,b \rangle \mid b \in B \}$ ja
$\varphi \circ \varphi^{-1} \subset \{ \langle a,a \rangle \mid a \in A \}$
Ühene vastavus, mis pole kõikjal määratud - osaliselt määratud funktsioon.
Ühene vastavus, mis on kõikjal määratud, kuid pole kõikjale määratud - täielikult määratud funktsioon.
Ühene kõikjal ja kõikjale määratud vastavus - sürjektsioon.
Üks-ühene kõikjal määratud vastavus - injektsioon.
Üks-ühene kõikjal ja kõikjale määratud vastavus - bijektsioon.

Näide: Hulk A - õpperühma tudengite hulk. Hulk B - hinnete hulk ($B=\{0,1,2,3,4,5\}$). Vastavus φ - eksamil tudengi poolt saadud hinne. Millistel tingimustel on φ osaliselt määratud funktsioon; täielikult määratud funktsioon; sürjektsioon; injektsioon; bijektsioon?

BINAARSUHTED

Meie poolt vaadeldavad binaarsuhteid võib käsitleda kui vastavuse φ erijuhtu, kus lähte- ja sihthulk langavad kokku ($D(\varphi)=R(\varphi)=A$). Tähistame järgnevas binaarsuhet tähega $R \subset AxA$. Binaarsuhet on mugav interpreteerida suhte graafiga - s.o. orienteeritud graaf, kus hulga A elemendid vastavad tippudele ja seosed elementide vahel - kaartele. Suhte võime esitada binaarmaatriksina (naabrusmaatriksina).
Näide.
Hulga $A=\{a,b,c,d,e\}$ elementideks on arvutikomponendid: a-sisendseade, b- aritmeetika-loogikaseade, c-juhtseade, d-mälu, e-väljundseade. Binaarsuhe R seob kahte elementi, kui esimene seade annab teisele infot arvuti töö käigus.

R=

	a	b	c	d	e
a	1	1	1	1	0
b	0	1	1	1	1
c	1	1	1	1	1
d	0	1	1	1	1
e	0	0	1	0	1

Binaarsuhete R omadused

- Refleksiivsus (α_1) - ($\forall a \in A\ [\langle a,a \rangle \in R]$).
- Antirefleksiivsus (α_2) - ($\forall a \in A\ [\langle a,a \rangle \notin R]$).

Suhe, mis ei täida nõudeid α_1 ega α_2 , on mitterefleksiivne.

- Sümmeetria (α_3) - ($\forall a,b \in A$ [$<a,b> \in R \rightarrow <b,a> \in R$]), kus $a \neq b$.
- Antisümmeetria (α_4) - ($\forall a,b \in A$ [$<a,b> \in R \rightarrow <b,a> \notin R$]), kus $a \neq b$.

Suhe, mis ei täida nõudeid α_3 ega α_4 , on mittesümmeetriline.

- Transitiivsus (α_5) - ($\forall a,b,c \in A$ [($<a,b> \in R$ & $<b,c> \in R$) $\rightarrow <a,c> \in R$]), kus $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$.
- Antitransitiivsus (α_6) - ($\forall a,b,c \in A$ [($<a,b> \in R$ & $<b,c> \in R$) $\rightarrow <a,c> \notin R$]), kus $a \neq b, b \neq c, a \neq c$.

Suhe, mis ei täida nõudeid α_5 ega α_6 , on mittetransitiivne.

- $d(R,\alpha_i)$ - suhte R kaugus omaduseni α_i , s.o. seoste arv, mis tuleb minimaalselt lisada suhtesse R (või eemaldada suhtest R), et saavatada omadust α_i.
- Suhte täiend - $\overline{R} = (A \times A) \setminus R$
- Pöördsuhe - $R^{-1} = \{ <a_i, a_j> \mid <a_j, a_i> \in R \}$
- Suhte R transitiivseks sulundiks nimetatakse minimaalset transitiivset suhet $\hat{R}$, mis sisaldab suhet R.

- Osaline mitterange järjestussuhe ($\leq$) on refleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne.
- Osaline range järjestussuhe ($<$) on antirefleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne.
- Lineaarne järjestussuhe - ($\forall a,b \in A$) [($a<b$) V ($b<a$)]

Järjestussuhte transitiivne sulund $\hat{R}$ = R (kuna R on algselt transitiivne).

- Ekvivalentsisuhe R on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne.
- Elemendi $a \in A$ ekvivalentsiklass ekvivalentsisuhtes R - $K(a) = \{ b \mid <a,b> \in R \}$

Ekvivalentsisuhe genereerib tükelduse P hulgal A.
Tükeldus P koosneb ekvivalentsiklassidest K_i , i=1,...,n.
$P = \{ K_1, K_2, ..., K_n \}$, kus $K_i \neq \emptyset$, i=1,...,n;
$K_i \cap K_j = \emptyset$, i,j=1,...,n, $i \neq j$;
$\cup K_i = A$.
0-tükeldus (nulltükeldus) koosneb 1-elemendilistest ekvivalentsi klassidest, 1-tükelduses (ühiktükelduses) on ainult üks ekvivalentsiklass.

Operatsioonid tükeldustega:

$P_1 \bullet P_2$: $(a_1 \equiv a_2 (P_1 \bullet P_2)) \Leftrightarrow (a_1 \equiv a_2 (P_1) \& a_1 \equiv a_2 (P_2))$
$P_1 + P_2$: $(a_1 \equiv a_2 (P_1 + P_2)) \Leftrightarrow (a_1 \equiv a_2 (P_1) V a_1 \equiv a_2 (P_2))$

$P_1 \leq P_2 \Leftrightarrow P_1 \bullet P_2 = P_1 \Leftrightarrow [\forall K_i \in P_1 (\exists K_j \in P_2 [K_i \subset K_j])]$

Ülesandeid vastavuste ja suhete temaatikal

- A = { a,b,c,d,e }   B = { x,y,z,w }   C = { 1,2,3,4 }

$\varphi_1 \subset A \times B$ φ_1 = { <a,y>,<b,z>,<c,z>,<d,w>,<d,y> }
$\varphi_2 \subset B \times C$ φ_2 = { <x,1>,<x,2>,<x,4>,<y,3>,<y,4>,<w,3> }
Leida D(φ_1), R(φ_1), $\overline{\varphi_1}, \varphi_1^{-1}, \varphi_1^{-1} \circ \varphi_1$. Esitada φ_1 graafiliselt.
Leida $\varphi_1 \circ \varphi_2, (\varphi_1 \circ \varphi_2)^{-1}, \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1^{-1}$.

Klassifitseerida saadud vastavused.

- A = { 1,2,3,4,5 }. Koostada suhe R, mis sisaldab mitte vähem kui 10 seost ja mis on:
  1) refleksiivne, sümmeetriline ja mittetransitiivne;
  2) mitterefleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne.

- A = { 1,2,3,4,5 } $R \subset A \times A$

R=

	1	2	3	4	5
1	1	1	0	1	0
2	1	0	0	1	0
3	0	0	0	0	0
4	1	1	0	0	1
5	0	0	0	1	0

Leida suhte R, tema täiendi ja pöördsuhte omadused (refleksiivsus, sümmeetria, transitiivsus, antirefleksiivsus, antisümmeetria, antitransitiivsus). Juhul kui mõnel suhtel teatav omadus puudub, leida kaugus selle omaduseni.

- A = { 1,2,3,4,5 }   B = {2,4,6,8 }
  $\varphi \subset A \times B$ $\varphi = \{ < a,b > \mid a \geq b \}$

Leida ja klassifitseerida vastavus φ.   Leida $\varphi^{-1} \circ \varphi$.

- $R \subset N \times N$ R = { < a,b> | a jagub b-ga (a(mod b)=0)}

Näidata, kas R on osalise järjestuse suhe.

- A = { 1,2,3,4,5 } $R \subset A \times A$
  R = { <1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,2>,<3,5>,<4,3>,<4,4<,<5,3> }

Leida suhte R transitiivne sulund.

- Antud suhte $R \subset A \times A$ naabrusmaatriks. A = { 1,2,3,4,5,6,7,8 }

R=

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	1	0	0	1
3	1	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	1	1	0
5	0	1	0	0	1	0	0	1
6	0	0	0	1	0	1	1	0
7	0	0	0	1	0	1	1	0
8	0	1	0	0	1	0	0	1

Näidata, et suhe R on ekvivalentsisuhe. Moodustada vastav tükeldus P_1 .
Olgu tükeldus P_2 = { { 1,4,6}, { 3 }, { 7 }, { 2,8 }, { 5 } }
Leida $P_1 \bullet P_2$ ja $P_1 + P_2$

- Hulga A võimsus on n. Leida kõikvõimalike antirefleksiivsete suhete arv; kõikvõimalike sümmeetriliste suhete arv.

- Antud kõigi sõnade hulk S tähestikus A. Sõna v on sõna w prefiks, kui eksisteerib sõna $u \in S$ nii, et w = vu. Näidata, et suhe „sõna v on sõna w prefiks“ on osalise järjestuse suhe hulgal S.

ALGEBRAD JA ALGEBRALISED SÜSTEEMID.

Algebra on süsteem A = < M,S >, kus M on algebra alushulk (objektide hulk) ja S on algebra signatuur (operatsioonide hulk).
Näiteks $< 2^A, \bar{\ }, \cup, \cap >$ on algebra, mille alushulgaks on hulga A astmehulk ning signatuuriks tuntud hulgateoreetilised tehted (täiend, ühend ja ühisosa).
Vastavalt tehetes osalevate operandide arvule määratakse signatuuri tüüp, mis on antud näites määratud vektoriga (1,2,2).

Põhimõisted

- Grupoid - lihtsaim algebra $< M, \bullet >$, kus $\bullet$ on 2-kohaline operatsioon.
- Parempoolne ühikelement e : $\forall m \in M\ (m \bullet e = m)$.
- Vasakpoolne ühikelement e : $\forall m \in M\ (e \bullet m = m)$.
- Ühikelement e : $\forall m \in M\ (m \bullet e = e \bullet m = m)$.

Igas grupoidis pole rohkem kui üks ühikelement.

- Grupoid on idempotentne, kui $\forall m \in M\ (m \bullet m = m)$.
- Grupoid on kommutatiivne, kui $\forall m_1, m_2 \in M\ (m_1 \bullet m_2 = m_2 \bullet m_1)$.
- Grupoid on assotsiatiivne (nimetatakse poolrühmaks), kui kehtib assotsiatiivsusseadus.
- Monoid on poolrühm, kus on olemas ühikelement.
- Rühm on monoid, kus igal elemendil on olemas pöördelement

$$[\forall m \in M\ \exists m^{-1} \in M\ (m \bullet m^{-1} = m^{-1} \bullet m = e)].$$

- Algebralise süsteemi moodustab algebra koos suhete hulgaga.

Olgu antud järjestussuhe $\leq$.

- Elementide m_1 ja m_2 ülemrajaks on element m_3, kui $m_1 \leq m_3$ ja $m_2 \leq m_3$.
- Elementide m_1 ja m_2 alamrajaks on element m_4, kui $m_4 \leq m_1$ ja $m_4 \leq m_2$.

Ülemraja on vähim, kui ta on väiksem suvalisest teisest ülemrajast.
Alamraja on suurim, kui ta on suurem suvalisest teisest alamrajast.

- Võreks nimetatakse algebralist süsteemi $< M, \leq, \cap, \cup >$, kus $\leq$ on osalise järjestuse suhe hulgal M ning 2 suvalist elementi hulgast M omavad vähimat ülemraja ja suurimat alamraja.

Seejuures $\cap$ ja $\cup$ on üldistatud operatsioonid rajade leidmiseks, milliste lahtimõtestus on tunduvalt laiem kui lihtsalt hulgateoreetilised operatsioonid.

Näited.
1. Naturaalarvude hulk N; $a \cap b = \min(a,b)$; $a \cup b = \max(a,b)$, $a \leq b$.
2. Hulk N; $a \cap b$ - SÜT; $a \cup b$ - VÜK; $a \leq b$ - b jagub a-ga.
3. Kahendvektorite hulk; $(x_1, x_2, ..., x_n) \leq (y_1, y_2, ..., y_n) \Leftrightarrow (x_i \leq y_i)$;
   $X \cap Y$ - X&Y (konjunktsioon) ; $X \cup Y$ - XVY (disjunktsioon).
4. Kõikvõimalike tükelduste hulk; $P_1 \cap P_2$ - $P_1 \bullet P_2$; $P_1 \cup P_2$ - $P_1 + P_2$;
   $P_1 \leq P_2$ - $P_1 \bullet P_2 = P_1$.

- Boole'i algebraks nimetatakse algebrat, mille signatuur koosneb 2 binaarsest operatsioonist + ja • ning ühest unaarsest operatsioonist $\bar{\ }$, kusjuures + ja • on kommutatiivsed, assotsiatiivsed, idempotentsed ning teineteise suhtes distributiivsed ning eksisteerivad elemendid 0 ja 1, nii et x • x = 0 ning x + x = 1.

Näited. $\{2^A, \cap, \cup, \bar{\ }\}$ - Cantori algebra.

$\{(0,1)^n, \&, V, \bar{\ }\}$ - loogikaalgebra.

- Kaks algebrat on isomorfsed ($A_1 = < M_1, S_1 > \equiv A_2 = < M_2, S_2 >$), kui eksisteerib üksühene vastavus φ nii, et φ: $(M_1 \cup S_1) \Leftrightarrow (M_2 \cap S_2)$, kus $f_i(m_{j1}, ..., m_{jk-1}) = m_{jk} \Leftrightarrow \varphi(f_i)(\varphi(m_{j1}), ..., (\varphi(m_{jk-1})) = \varphi(m_{jk})$, $m_{jl} \in M_1$, $\varphi(m_{jl}) \in M_2$, $f_i \in S_1$, $\varphi(f_i) \in S_2$.

Cantori algebra ja loogikaalgebra on isomorfsed.

Ülesanded.

- A={0,1,...,p-1}. Operatsioonid : +(mod p) ja x(mod p) (s.o. liitmine ja korrutamine mooduliga p). Kas selliselt kirjeldatud algabra on rühm?

- A={1,2,3,4}. Ehitada kõikvõimalike tükelduste võre.

MATEMAATILINE LOOGIKA

Vaatleme loogikafunktsioone $f(x_1, x_2, ...x_n)$, kus nii argumendid kui funktsiooni väärtus kuuluvad hulka {0,1}.Iga loogikafunktsiooni võib esitada tõeväärtustabelina.

Näide Hääletusseade. Komisjon, mis koosneb 3 inimesest, hääletab teatava otsuse vastuvõtmise küsimuses. Otsus võetakse vastu lihthäälteenamusega.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3$$

Erinevate loogikafunktsioonide $f(x_1, x_2, ...x_n)$ arv K on 2^{2^n} .

$n=1 \rightarrow K=4$
$n=2 \rightarrow K=16$
$n=3 \rightarrow K=256$
$n=4 \rightarrow K=65536$
$n=5 \rightarrow K=4{,}3 \bullet 10^9$

Järgnevalt tutvume kõikvõimalike kahe muutuja funktsioonidega $f(x_1, x_2)$.

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Tabelis on kirjeldatud järgnevad funktsioonid:

- f_0 - konstant "0"
- f_1 - konjunktsioon, loogiline korrutamine, "ja"-funktsioon, $x_1 \& x_2$ *ehk* $x_1 \bullet x_2$ *ehk* $x_1 x_2$
- f_2 - implikatsiooni eitus $\overline{x_1 \rightarrow x_2}$
- f_3 - argumendi x_1 väärtus
- f_4 - pöördimplikatsiooni eitus $\overline{x_2 \rightarrow x_1}$
- f_5 - argumendi x_2 väärtus
- f_6 - argumentide summa mooduliga 2, $(x_1 + x_2)mod2$ *ehk* $x_1 \oplus x_2$
- f_7 - disjunktsioon, loogiline liitmine, "või"-funktsioon, $x_1 \vee x_2$ *ehk* $x_1 + x_2$
- f_8 - Pierce'i nool, Pierce'i funktsioon, "või-ei"-funktsioon, $\overline{x_1 \vee x_2}$ *ehk* $x_1 \mid x_2$
- f_9 - ekvivalentsi- ehk samaväärsusfunktsioon, $x_1 \leftrightarrow x_2$ *ehk* $x_1 \approx x_2$
- f_{10} - argumendi inversioon $\overline{x_2}$
- f_{11} - pöördimplikatsioon $x_2 \rightarrow x_1$
- f_{12} - argumendi inversioon $\overline{x_1}$
- f_{13} - implikatsioon $x_1 \rightarrow x_2$
- f_{14} - Shefferi kriips, Shefferi funktsioon, $\overline{x_1 \& x_2}$ ehk $x_1 \downarrow x_2$
- f_{15} - konstant "1"

Enamkasutatavate tehete prioriteet (tähtsus), mis määrab sulgude kasutamise vajaduse loogikaavaldistes: $\overline{}$, $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

<u>Loogika põhiseadused</u>

- Idempotentsusseadused

$x \& x = x \qquad x \vee x = x$

- Kommutatiivsusseadused

$x_1 \& x_2 = x_2 \& x_1$
$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$

- Assotsiatiivsusseadused

$(x_1 \& x_2) \& x_3 = x_1 \& (x_2 \& x_3)$
$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$

- Distributiivsusseadused

$x_1 \& (x_2 \vee x_3) = x_1 \& x_2 \vee x_1 \& x_3$
$x_1 \vee (x_2 \& x_3) = (x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee x_3)$

- Topelteituse seadus $\overline{\overline{x}} = x$
- De Morgani seadused

$\overline{x_1 \& x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$

$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \& \overline{x_2}$

- Kleepimisseadused

$x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} = x_1$

$(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_2}) = x_1$

- Neeldumisseadused

$x_1 \vee x_1 x_2 = x_1$

$x_1 \& (x_1 \vee x_2) = x_1$

$x_1 \vee \overline{x_1} x_2 = x_1 \vee x_2$

$x_1 \& (\overline{x_1} \vee x_2) = x_1 x_2$

- Tehted konstantidega

$x \vee \overline{x} = 1$ $\quad$ $x \& \overline{x} = 0$
$x \& 0 = 0$ $\quad$ $x \vee 0 = x$
$x \& 1 = x$ $\quad$ $x \vee 1 = 1$

- Lisateisendused

$x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$

$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2}$

$x_1 \leftrightarrow x_2 = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1 x_2$

Näiteid (näidetes on antud algavaldis ja lõppresultaat pärast lihtsustamist)

$((\overline{x_1 \to x_2}) \to (x_1 \vee x_2)) \& x_2 = x_2$

$((x_1 \to x_2) \& (x_2 \to x_3)) \to (x_3 \to x_1) = x_1 \vee \overline{x_3}$

$x_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_3} = x_1 \vee x_2 x_3$

$(\overline{x_1} \vee x_2) \to (x_1 \overline{x_2} \to x_3) = 1$

- Loogikafunktsiooni konstituent: $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} (x_i)^{\alpha_i}$, kus $(x_i)^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i, kui\_\alpha_i = 1 \\ \overline{x_i}, kui\_\alpha_i = 0 \end{cases}$

Iga loogikafunktsioon on esitatav oma konstituentide disjunktsioonina. Loogikafunktsiooni esitamiseks kasutame loogikavalemeid.

- Loogikavalem on samaselt tõene, kui iga argumentide vektori $(x_1 , x_2 ,..., x_n)$ puhul
  $f(x_1 , x_2 ,..., x_n)=1$.

Samaselt tõene valem - tautoloogia.

- Loogikavalem on samaselt väär, kui iga argumentide vektori $(x_1 , x_2 ,..., x_n)$ puhul
  $f(x_1 , x_2 ,..., x_n)=0$.
- Loogikavalemid f_1 ja f_2 samaväärsed, kui iga argumentide vektori $(x_1 , x_2 ,..., x_n)$ puhul
  $f_1(x_1 , x_2 ,..., x_n)= f_2(x_1 , x_2 ,..., x_n)=$.

- Algtermiks nimetame argumenti x_i või tema inversiooni $\overline{x_i}$.
- Loogikavalemi keerukus on tema koosseisus olevate algtermide arv.
- Loogikavalemi sügavuse määrame järgnevalt:

1. argumendi x_i sügavus on 0;
2. $F(f_1, f_2, ..., f_n)$ sügavus on k+1, kui $f_1, f_2, ..., f_n$ maksimaalne sügavus on k.

<u>Ülesandeid</u>

- Lihtsustada järgmine avaldis:

$$\left(x_1 \leftrightarrow x_3\right) \vee x_1 \& \left(x_1 \rightarrow x_2\right)\overline{\left(\left(\overline{x_1 \rightarrow x_3}\right) \& \left(x_3 \vee \overline{x_2}\right)\right)}$$

Leida tõeväärtustabel alg- ja lõppavaldise jaoks. Veenduda lihtsustuse õigsuses.

- Lihtsustada järgmised avaldised:

$$\left(\left(x_1 \vee x_1x_2 \vee \left(\overline{x_1} \rightarrow x_3\right) \& x_1\right) \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4\right) \& \overline{x_1}$$

$$\left(\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_3x_4 \vee \overline{x_1}x_3\right)\left(\overline{x_1} \rightarrow x_4\right)\left(x_1 \rightarrow \overline{x_4}\right)$$

$$\left(\left(x_1\overline{x_4} \vee \overline{\overline{x_3}\left(\overline{x_2 \vee \overline{x_1}}\right)}\right)\right)\left(x_1\overline{x_2} \vee x_4\right)$$

- Tõestada DeMorgani seadused 3 muutuja jaoks nii tõeväärtustabeliga kui ka valemiliselt.
- Antud kolme muutuja nn. mazhoritaarfunktsioon: $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$.

  Tõestada, et kehtivad järgmised võrdused:

$$f\left(x_1, \overline{x_2}, x_3\right) = x_2$$

$$\overline{f\left(x_1, x_2, x_3\right)} = f\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}\right)$$

<u>Loogikafunktsioonide normaalkujud</u>

Loogikafunktsioon $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ võib olla esitatud erinevate valemite abil.

Näiteks $f\left(x_1, x_2\right) = x_1 \vee x_2 = x_1\overline{x_2} \vee x_2 = \left(x_1x_2 \vee x_1\overline{x_2} \vee x_2\right)\left(x_2 \vee \overline{x_2}\right) =$............

- Loogikafunktsiooni kanoonilisi standardseid esitusvalemeid nimetatakse funktsiooni normaalkujudeks.
- Disjunktiivne normaalkuju (DNK) on valem, mis koosneb elemantaarkonjunktsioonide disjunktsioonist.
- Elemantaarkonjunktsioon koosneb argumentide ja/või nende inversioonide konjunktsioonist.
- Konjunktiivne normaalkuju (KNK) on valem, mis koosneb elemantaardisjunktsioonide konjunktsioonist.
- Elemantaardisjunktsioon koosneb argumentide ja/või nende inversioonide disjunktsioonist.
- Iga funktsioon on esitatav DNK ja KNK kujul, kuid mitte üheselt.

- Täielik DNK (TDNK) on selline DNK, kus iga elemantaarkonjunktsiooni pikkus on n (s.o. iga elementaarkonjunktsioon sisaldab funktsiooni kõiki argumente).

- Täielik KNK (TKNK) on selline KNK, kus iga elemantaardisjunktsiooni pikkus on n (s.o. iga elementaardisjunktsioon sisaldab funktsiooni kõiki argumente).
- Igal funktsioonil on täpselt üks TDNK ja üks TKNK.

<u>Näiteid</u>

- $\overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2}x_3 = \overline{x_1}x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3$

Parempoolne valem on funktsiooni täielik DNK.

- $\overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2}x_3 = \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)$

Parempoolne valem on funktsiooni täielik KNK.

- $\left(\overline{x_1}x_2\right) \to \left(\overline{x_1} \to x_3\right) = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$

Parempoolne valem on antud funktsiooni DNK, KNK, TKNK.

Loogikafunktsiooni võib esitada ka nn. numbrilises ehk kümnendesitusvormis. Sel juhul esitatakse funktsiooni ühtede või nullide piirkond vastavate argumendivektorite kümnendekvivalentide abil.

Näiteks vaatleme funktsiooni eelnevast näitekomplektist:
$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2}x_3 = \sum(2,3,5)_1 = \prod(0,1,4,6,7)_0$
Kasutatud näitefunktsiooni tõeväärtustabel on toodud järgnevas:

Nr.	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	$\overline{f\left(x_1, x_2, x_3\right)}$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	1	0
6	1	1	0	0	1
7	1	1	1	0	1

- Minimaalse keerukusega DNK-d (KNK-d) nimetatakse minimaalseks DNK-ks (KNK-ks). Lühenditena vastvalt MDNK ja MKNK.

<u>Ülesanne</u>

$\left(x_1 \to \left(\overline{x_2} \vee x_3\right)\right) \leftrightarrow \left(\overline{x_1} \vee x_2\right)$
Leida antud loogikafunktsiooni MDNK, MKNK, TDNK, TKNK.

<u>Minimeerimine normaalkujude klassis</u>

Boole'i ruum $\{0,1\}^n$ all mõistame järgnevas kõikvõimalike kahendvektorite $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hulka. Hüperkuupi (n-mõõtmelist kuupi) esitame kui graafi, mille iga tipp vastab üks-üheselt ruumi $\{0,1\}^n$ ühele vektorile ja 2 tippu on omavahel seotud, kui vastavad vektorid on ortogonaalsed (s.o. erinevad) täpselt ühe argumendi järgi ja langevad kokku ülejäänud (n-1)-s argumendis.

- Intervall on vektorite $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hulk, mis moodustavad teatava suurusega hüperkuubi.

- Antud funktsiooni ühtede intervall on intervall, mille koosseisus olevate vektorite jaoks $f(x_1, x_2, ..., x_n)=1$.
- Maksimaalne ühtede intervall on ühtede intervall, mis ei sisaldu üheski teises ühtede intervallis.

Näide

$f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma(0,1,2,3,7)_1$

Ühtede intervallid: {0},{1},{2},{3},{7},{0,1},{0,2},{1,3},{2,3},{3,7},{0,1,2,3}.

Maksimaalsed ühtede intevallid: {3,7},{0,1,2,3}.

Intervalle võime esitada baasis {0,1,-}

Näiteks: {1} → 001 → $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$

{0,1,2,3} → 0-- → $\bar{x}_1$

{3,7} → -11 → x_2x_3

- Konjunktsiooni, mis vastab ühtede intervallile nimetatakse funktsiooni implikandiks.
- Konjunktsiooni, mis vastab maksimaalsele ühtede intervallile nimetatakse funktsiooni lihtimplikandiks.
- Kõigi lihtimplikantide disjunktsioon esiatb funktsiooni taandatud DNK.

Näit. $f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma(1,3,6,7)_1$

Lihtimplikandid: {1,3} → 0-1

{3,7} → -11

{6,7} → 11-

Taandatud DNK: $\bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2$

- Taandatud DNK võib sisaldada liiaseid liikmeid.

Eelmises näites esitatud funktsiooni MDNK on järgnev: $\bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2$.

Kõik eelpool esitatu võib olla interpreteeritud nullide piirkonna ja vastavalt KNK jaoks (maksimaalne nullide intervall, taandatud KNK jne.)

Ülesanded

- Antud funktsioon $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$

Esitada funktsioon TDNK, MDNK ja taandatud DNK kujul.

- Vaatleme summaatorit, mis realiseerib liitmistehet F=A+B. A ja B kuuluvad hulka {0,1,2,3} ja on kodeeritud vastavalt kahendkujule {00,01,10,11} argumentidena $a_1\ a_2$ ja $b_1\ b_2$. F∈{0,1,2,3,4,5,6} ja on kodeeritud {000,001,010,011,100,101,110} funktsioonidena $f_1\ f_2\ f_3$, kusjuures $f_i = f(a_1, a_2, b_1, b_2)$. Esitada f_1 MDNK-s; f_2 MKNK-s; f_3 TDNK-s.

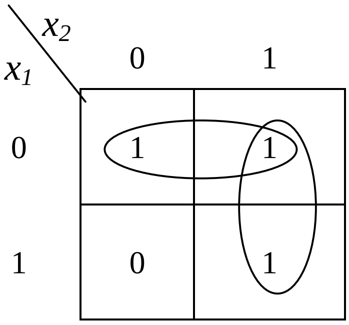
Loogikafunktsioonide minimeerimine Karnaugh' kaardiga

Antud teemat on eestikeelses versioonis põhjalikult käsitletud A.Ariste „Loogikalülituste koostamise metoodikas“ (TPI, 1978). Seetõttu piirdun siin vaid mõingate näidetaga.

- <u>Täielikult määratud loogikafunktsioonid</u>.

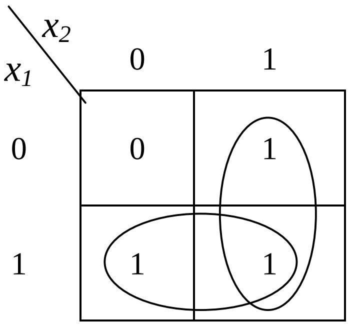
1. Kahe muutuja loogikafunktsioonid.

<u>Näide 1</u> $f(x_1, x_2) = \Sigma(0,1,3)_1$



$f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$

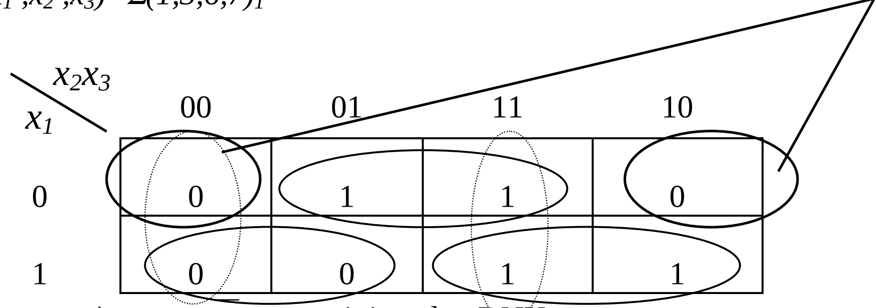
<u>Näide 2</u> $f(x_1, x_2) = \Sigma(1,2,3)_1$



$f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$

2.Kolme muutuja loogikafunktsioonid

<u>Näide 3</u>
$f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma(1,3,6,7)_1$



$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee \overline{x_1}x_3$ - minimaalne DNK

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2)$ - minimaalne KNK

Märkus: Karnough' kaardil on punktiiriga näidatud liiasetele lihtimplikantidele vastavad kontuurid.

<u>Näide 4</u>

$f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma(1,4,5,6,7)_1$

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \overline{x_2} x_3$ - minimaalne DNK

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_3)$ - minimaalne KNK

3. Nelja muutuja loogikafunktsioonid

<u>Näide 5</u>

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(0,1,6,8,9,12,14)_1$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	1	0	0

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_2 x_3 \overline{x_4}$ - minimaalne DNK

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_2} \vee \overline{x_4})(x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$ - minimaalne KNK

- <u>Osaliselt määratud loogikafunktsioonid</u>

<u>Näide 6</u>

$f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma(0,2,7)_1(1,3,5)_-$

x_2x_3	00	01	11	10

x_1				
0	1	-	-	1
1	0	-	1	0

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \vee x_3$ - avaldis on ühtlasi nii minimaalne DNK kui ka minimaalne KNK.

<u>Näide 7</u>

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(2,3,5,6,7,11,15)_1(0,10,14)$.

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	-	0	1	1
01	0	1	1	1
11	0	0	1	-
10	0	0	1	-

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_4$ - minimaalne DNK

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1} \vee x_3)(x_2 \vee x_3)(x_3 \vee x_4)$ - minimaalne KNK

- Viie muutuja loogikafunktsioonid.

<u>Näide 8</u>

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \Sigma(2,3,5,5,7,11,15,16,17,18,19,21,22,23,26,27,30,31)_1(0,10,14)$.

x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00	-	0	1	1
01	0	1	1	1
11	0	0	1	-
10	0	0	1	-

$x_1=0$

x_4x_5

x_2x_3	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

$x_1=1$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)= x_4 \vee \overline{x_2}x_3x_5 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x_3}$ - minimaalne DNK

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)= \left(\overline{x_2} \vee x_4\right)\left(\overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5\right)\left(x_1 \vee x_3 \vee x_4\right)$ - minimaalne KNK

<u>Ülesanded</u>

- Ruumi temperatuuri reguleerivad 2 konditsioneeri F1 ja F2. Neid juhitakse 3 kahendanduri X1, X2 ja X3 abil. Kui temperatuur on alla 18 kraadi, on X1=X2=X3=0 ja konditsioneerid välja lülitatud (F1=F2=0). Kui temperatuur on 18 ja 21 kraadi vahel, siis X1=1 ning X2=X3=0. Sisse lülitatakse konditsioneer F1 (F1=1, F2=0). Kui temperatuur on 21 ja 24 kraadi vahel, siis X1=X2=1 ja X3=0. Sisse lülitatakse võimsam konditsioneer F2 (F1=0, F2=1). Temperatuuril üle 24 kraadi (X1=X2=X3=1) lülitatakse sisse mõlemad konditsioneerid (F1=F2=1). Avaldada osaliselt määratud funktsioonid F1 ja F2 sõltuvalt anduritest X1, X2 ja X3.

- Antud nelja muutuja loogikafunktsioon:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)= x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_4 \vee x_3x_4 \vee x_1\overline{x}_3\overline{x_4}$

Leida Karnaugh' kaardiga MDNK ja MKNK.

Kontrollvastus: $f(x_1, x_2, x_3, x_4)= x_1\overline{x_3} \vee x_3x_4$

- Antud nelja muutuja loogikafunktsioon:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)= \left(x_1\overline{x_4} \vee \overline{\overline{x_3}\left(\overline{x_2 \vee \overline{x_1}}\right)}\right)\left(x_1\overline{x_2} \vee x_4\right)$

Leida Karnaugh' kaardiga MDNK ja MKNK.

Kontrollvastus: $f(x_1, x_2, x_3, x_4)= \overline{x_1}x_4 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x_4}$

- Nelja muutuja funktsioon $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ on esitatud konjunktsioonina kahest funktsioonist:

$F(x_1, x_2, x_3, x_4)= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \& f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$F(x_1, x_2, x_3, x_4)= \overline{x}_1\overline{x_3}x_4 \vee x_1x_3\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_4}$

$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)= x_1x_2 \vee \overline{x_3}x_4 \vee x_1x_3$

Leida minimaalse DNK-ga $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

- Nelja muutuja funktsioon $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ on esitatud disjunktsioonina kahest funktsioonist:

$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \vee f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$
$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 \vee \overline{x_3}x_4 \vee x_1x_3$
$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4 \vee x_1x_3\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_4}$
Leida minimaalse DNK-ga $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

- Antud nelja muutuja funktsioon $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4 \vee x_1x_3\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_4}$. Leida funktsiooni $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ inversiooni minimaalne DNK.

- Minimeerida järgnevad funktsioonid Karnough' kaardiga. Leida MDNK ja MKNK.

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Pi(1,4,5,9,11,12,13,15)_1(3,14)$.
$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \Sigma(0,2,6,7,8,10,24,30)_1(3,14,16,18,26)$.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} 1, kui\_x_1x_2 + x_3x_4 \geq 4 \\ 0, vastasel\_juhul \end{cases}$$

Viimases ülesandes tuleb argumendipaari x_ix_j vaadelda kui tavalisi kahekohalisi kahendarve ning +-operatsiooni kui aritmeetilist liitmist.

Loogikafunktsioonide minimeerimine McCluskey' meetodil

Karnaugh' kaart võimaldab effektiivselt minimeerida funktsioone, mille muutujate arv on suhteliselt väike. Samuti on kaart eelkõige visuaalne minimeerimisvahend ning kasutatav meetod on tülikas algoritmiseerimiseks (seega mittesobiv masinrealisatsiooniks). McCluskey minimeerimismeetod on süstemaatiline ja kergesti viidav algoritmilisele kujule. Samuti puuduvad piirangud funktsiooni muutujate arvule (reaalsed piirangud tekkivad sõltuvalt arvuti võimsusest).

- McCluskey meetod koosneb kahest põhietapist:

1. Loogikafunktsiooni kõigi lihtimplikantide leidmine, kasutades süstemaatiliselt kleepimisseadusi;
2. Lihtimplikantide hulga minimeerimine (katteülesanne).

Kaks enamlevinud varianti antud meetodist erinevad algandmete esituselt. Need on niinimetatud intervallmeetod, mille puhul implikantide kirjeldamiseks kasutatakse intervallesitust ja numbriline meetod, mis on orienteeritud funktsiooni kümnendesitusele.

- <u>Intervallmeetod</u>

Kuna McCluskey meetod põhineb kleepimisseaduse kõikvõimalikele rakendustele antud funktsiooni ühtede piirkonnas, on otstarbekas esmalt sektsioneerida kogu funktsiooni ühtede piirkond vastavate kahendvektorite nn. indeksite järgi. Sellega minimeeritakse läbiviidavate võrdluste arvu. Boole'i vektori indeks on ühtede arv selles vektoris. Ilmselt on omavahel kleebitavad vaid need kahendvektorid, mille indeksid erinevad täpselt ühe võrra (seejuures langevad (n-1) argumendi väärtused kokku ja ühe argumendi väärtus on kleebitavates vektorites erinev).
Pärast indeksite määramist toimub kleepmisseaduse alusel intervallide tabelite koostamine (vt. näide). Esimese etapi lõpuks saadakse kõigi antud funktsiooni lihtimplikantide loetelu. Teise etapi käigus seda loetelu minimeeritakse s.t. valitakse minimaalne alamhulk lihtimplikantidest, mis võimaldavad katta antud funktsiooni ühtede piirkonna (s.o. tüüpiline katteülesanne).

Näide

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(0,1,2,5,6,7,8,9,10,14)_1$

- 1.etapp - lihtimplikantide hulga leidmine

Indeks	Intervall	Märge
0	0000	x
1	0001	x
	0010	x
	1000	x
2	0101	x
	0110	x
	1001	x
	1010	x
3	0111	x
	1110	x

Indeks	Intervall	Märge
0-1	000-	x
	00-0	x
	-000	x
1-2	0-01	A1
	-001	x
	0-10	x
	-010	x
	100-	x
	10-0	x
2-3	01-1	A2
	011-	A3
	-110	x
	1-10	x

Indeks	Intervall	Märge
0-1-1-2	-00-	A4
	-0-0	A5
1-2-2-3	--10	A6

Tabelite kolmandas veerus olev märge x näitab, et antud intervall on osalenud kleepimisprotsessis ja kuulub järelikult mõne suurema intervalli koosseisu. Märke x puudumine näitab, et intervall on lihtimplikandiks (tähistused A1 kuni A6).

- 2.etapp - lihtimplikantide hulga minimeerimine

Impl.	0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
A1		x		x						
A2				x		x				
A3					x	x				
A4	x	x					x	⊗		
A5	x		x				x		x	
A6			x		x				x	⊗

Lahendis osalevad lihtimplikandid peavad katma funktsiooni ühtede piirkonna. Lihtimplikandid A4 ja A6 on igal juhul vajalikud, kuna nad võimaldavad ainsatena katta vektoreid 9 ja 14 (tabelis ⊗). Implikantide A4 ja A6 lülitamine lahendisse katab ühtlasi ka vektorid 0,1,8 (A4) ja 2,6,10 (A6). Seega jäävad katmata vektorid 5 ja 7, mis omakorda kaetakse implikandiga A2.

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = A6 \vee A4 \vee A2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4$

- Numbriline meetod

Implikantide kujutamine kolmendintervallide kujul võib olla küllalt tülikas, kui funktsiooni argumentide arv on küllalt suur. Pikkade intervallidega suureneb vigade tõenäosus (seda küll käsitsi lahendamisel). Meetodi 2. etapil tekitab probleeme kattetabeli täitmine, kus paratamatult läheme intervallidelt tagasi kümnendesitusele. McCluskey numbriline meetod säilitab andmete esituse kümnendkujul praktiliselt kuni lahendi väljakirjutamiseni. Kleepimisseaduste rakendus numbrilisel kujul nõuab teatavaid lisareegleid, mida järgnevas kirjeldatame. Kümnendnumbri indeksi mõiste on endiselt seotud numbrile vastava kahendvektori ühtede arvuga. Numbrid on omavahel kleebitavad, kui:

1. numbrite vahe on võrdne 2^k , kus k=0,1,2...;
2. suurema numbriga seostub suurem indeks.

Igal kleepimisel fikseeritakse numbrite vahe, mis hilisemas on vajalik kleepimisel väljalangeva argumendi määramiseks. Vahede fikseerimiseks on vaja alates lihtimplikantide leidmise etapi teisest tabelist lisaveergu „vahe“

Kasutades uuesti sama näidet, leiame lihtimplikantide hulga numbrilisel meetodiga.

- 1.etapp - lihtimplikantide hulga leidmine

Ind.	Nr.	Märge
0	0	x
1	1	x
	2	x
	8	x
2	5	x
	6	x
	9	x
	10	x
3	7	x
	14	x

Ind.	Nr.-d	Vahe	Märge
0-1	0-1	1	x
	0-2	2	x
	0-8	8	x
1-2	1-5	4	A1
	1-9	8	x
	2-6	4	x
	2-10	8	x
	8-9	1	x
	8-10	2	x
2-3	5-7	2	A2
	6-7	1	A3
	6-14	8	x
	10-14	4	x

Ind.	Nr.-d	Vahe	Märge
0-1-1-2	0-1-8-9	1,8	A4
	0-2-8-10	2,8	A5
1-2-2-3	2-6-10-14	4,8	A6

Leitud lihtimplikantide hulga minimeerimine toimub täpselt samuti, kui intervallmeetodi puhul. Lahendisse satuvad lihtimplikandid A2, A4 ja A6. Märgime, et siiani oleme kogu info esitanud eranditult kümnendkujul. Minimaalse DNK väljakirjutamisel võib lähtuda järgnevas tabelis kirjeldatud mõttekäigust.

Lihtimplikant	Vahed	x_1	x_2	x_3	x_4	Konjunktsioon
A2	2	0	1	-	1	$\overline{x_1}x_2x_4$
A4	1,8	-	0	0	-	$\overline{x_2}\,\overline{x_3}$
A6	4,8	-	-	1	0	$x_3\overline{x_4}$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = A4 \vee A6 \vee A2 = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2x_4$

Kommentaarid:

1. Muutujate kaalud (antud juhul 8-4-2-1) ja vahede väärtused määravad konjunktsioonides mitteosalevad argumendid. Näiteks vahedest 1,8 (implikant A4) tulenevalt ei osale nimetatud konjunktsioonis argumendid x_1 ja x_4 .
2. Ülejäänud argumentide märgid tulenevad suvalisest implikandi kirjeldusse kuuluva kümnendnumbri kahendkoodist (s.o. vastavast kahendvektorist). Näiteks implikandi A4 koosseisus olevate kõigi numbrite 0,1,8 ja 9 kahendkoodides on $x_2 = 0$ ja $x_3 = 0$. Seega konjunktsiooniks tuleb $\bar{x}_2\bar{x}_3$.

Edasises kirjelduses põhineme McCluskey numbrilisele meetodile. McCluskey meetodiga on võimalik analoogiliselt tuletada ka minimaalne KNK, samuti minimeerima osaliselt määratud loogikafunktsioone. Peatume järgnevalt nendel probleemidel.

- <u>Minimaalse KNK tuletamine</u>

Toome välja olulisemad erinevused võrreldes DNK tuletamisega (orientatsioon järgnevas tehtud numbrilisele meetodile).
1. Lähtume loogikafunktsiooni nullide piirkonnast.
2. Kogu lahendusprotsess on analoogiline eelpool kirjeldatuga kuni funktsiooni väljakirjutamiseni (leitakse maksimaalsed nullide intervallid (etapp 1) ja minimeeritakse nende hulk (kaetakse kõik nullide piirkonna punktid minimaalse arvu intervallidega - s.o. lahendatakse katteülesanne (etapp 2)).
3. Iga lahendisse lülitatav maksimaalne nullide intervall vastab minimaalse KNK elementaardisjunktsioonile, seega argumentide märgid tuleb väljakirjutamisel inverteerida.

- <u>**Näide**</u>

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Pi(2,5,6,7,10,11,14)_0$

- 1.etapp - lihtimplikantide hulga leidmine

Ind.	Nr.	Märge	Ind.	Nr.-d	Vahe	Märge	Ind.	Nr.-d	Vahe	Märge
1	2	x	1-2	2-6	4	x	1-2-2-3	2-6-10-14	4,8	A4
2	5	x		2-10	8	x				
	6	x	2-3	5-7	8	A1				
	10	x		6-7	4	A2				
3	7	x		6-14	8	x				
	11	x		10-11	4	A3				
	14	x		10-14	8	x				

- 2.etapp - lihtimplikantide hulga minimeerimine

Impl.	2	5	6	7	10	11	14
A1		⊗		x			
A2			x	x			
A3					x	⊗	
A4	⊗		x		x		⊗

Kohustuslikud intervallid A1(vektor 5), A3 (vektor 11) ja A4 (vektorid 2 ja 14) katavad kogu nullide piirkonna. Elementaarkonjunktsioonide leidmine toimub analoogiliselt eelpool tooduga

Lihtimplikant	Vahed	x_1	x_2	x_3	x_4	Disjunktsioon
A1	2	0	1	-	1	$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$
A3	1	1	0	1	-	$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$
A4	4,8	-	-	1	0	$(\bar{x}_3 \vee x_4)$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_3 \vee x_4)$

- Osaliselt määratud funktsioonide minimeerimine (DNK näite baasil).

Erinevused võrreldes eelnevaga:

1. Esimesel tapil ühendatakse funktsiooni ühtede ja määramatuspiirkonnad eesmärgiga kasutada määramatuspiirkonda implikantide laiendamiseks. Seejuures lihtimplikandid, mis on moodustatud ainult määramatuspiirkonna baasil märgistatakse eraldi (järgnevas näites tärniga *) eristamaks neid ülejäänutest ja vältimaks nende sattumist lõpplahendisse.
2. Teisel etapil on vaja katta vaid ühtede piirkonna punktid. Katmiseks kasutatakse lihtimplikante, mis kasvõi osaliselt katavad ühtede piirkonda.

<u>Näide</u>

Antud osaliselt määratud funktsioon:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(0,2,4,8,10,12)_1\ (5,13,15)_-$

- 1.etapp - lihtimplikantide hulga leidmine

Ind.	Nr.	Märge	Ind.	Nr.-d	Vahe	Märge	Ind.	Nr.-d	Vahe	Märge
0	0	x	0-1	0-2	2	x	0-1-1-2	0-2-8-10	2,8	A1
1	2	x		0-4	4	x		0-4-8-12	4,8	A2
	4	x		0-8	8	x	1-2-2-3	4-5-12-13	1,8	A3
	8	x	1-2	2-10	8	x				
2	5*	x		4-5	1	x				
	10	x		4-12	8	x				
	12	x		8-10	2	x				
3	13*	x		8-12	4	x				
4	15*	x	2-3	5-13*	8	x				
				12-13	1	x				
			3-4	13-15*	2	#				

Teise tabeli viimane intevall (märgistatud #) ei moodusta funktsiooni lihtimplikanti, kuna on moodustatud määramatuspiirkonna arvel. Seega leidsime kolm lihtimplikanti, milliste alusel moodustatakse minimaalne DNK.

- 2.etapp

Impl.	0	2	4	8	10	12
A1	x	⊗		x	⊗	
A2	x		x	x		x
A3			x			x

Kohustuslik on intervall A1(vektorid 4 ja 10). Katmata jäänud punktide 4 ja 12 jaoks sobib kas implikant A2 või implikant A3.

Lihtimplikant	Vahed	x_1	x_2	x_3	x_4	Konjunktsioon
A1	2,8	-	0	-	0	$\bar{x}_2\bar{x}_4$
A2	4,8	-	-	0	0	$\bar{x}_3\bar{x}_4$
A3	1,8	-	1	0	-	$x_2\bar{x}_3$

Antud funktsiooni jaoks eksisteerib kaks keerukuselt võrdväärset lahendit:
$f^1(x_1, x_2, x_3, x_4) = A1 \vee A2 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4$
$f^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = A1 \vee A3 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3$

McCluskey meetodiga tutvumiseks sobib samuti juba eelpool mainitud:
- A.Ariste "Loogikalülituste koostamise metoodika"

Ülesanded
- Leida McCluskey meetodiga järgmiste funktsioonide minimaalsed DNK ja KNK.

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(2,3,5,7)_1$
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(0,1,4,9,14)_1\ (2,3,8,11,12,15)_{-}$
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(0,1,3,4,8,9,12,13,15)_1$
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,27,28,29,30)_1$

Nõrgalt määratud loogikafunktsioonide minimeerimine

Olgu tegemist osaliselt määratud loogikafunktsiooniga, mille määramispiirkond jaguneb kolmeks:
-piirkond, kus $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$ (piirkond V_1);
-piirkond, kus $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ (piirkond V_0);
-piirkond, kus $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ väärtus pole määratud (piirkond V_-);
Vaatleme nn. nõrgalt määratud loogikafunktsioone $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, millistel on järgmised omadused:
- $|V_1| + |V_0| << |V_-|$;
- funktsiooni argumentide arv on suur;
- V_1 ja V_0 on esitatud intervallide kujul.

Selliste omadustega ja selliselt esitatud funktsioonide minimeerimiseks ei sobi ei Karnaugh' kaart ega McCluskey meetod.
Nõrgalt määratud funktsioonide minimeerimisel (DNK klassis) on võimalik kasutada heuristilist meetodit, mille puhul laiendatakse funktsiooni ühtede intervalle (argumentide vabastamise teel) nii, et ükski ühtede intervall ei omaks ühisosa ühegi nullide intervalliga.

Sellisel laiendusel võib abivahendina kasutada nn. ortogonaalsusfunktsiooni #, mis on kirjeldatud järgnevalt:

#	0	1	-
0	0	1	0
1	1	0	0
-	0	0	0

Rakendatuna intervallide paarile näitab funktsioon #, milliste argumentide järgi on intervallid ortogonaalsed (s.o. teatud argument on ühes intrvallis 0, teises 1). Kahte intervalli nimetame mittekattuvateks, kui nad on ortogonaalsed vähemalt ühe argumendi järgi. Kui intervallid on ortogonaalsed mitme argumendi järgi, võib osa argumente vabastada (s.o intervalli suurendada ehk vastavat konjunktsiooni lühendada).

- <u>Näide 1</u>

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} 1\_intervallides\_000-, 0-01 \\ 0\_intervallides\_-100, 1011 \\ -\_ülejäänud\_määramispiirkonnas \end{cases}$$

Analüüsime kõikide intervallipaaride ortogonaalsust.

Nullide int. / Ühtede int.	- 1 0 0	1 0 1 1
0 0 0 -	0 1 0 0	1 0 1 0
0 - 0 1	0 0 0 1	1 0 1 0

Intervallid 000- ja -100 on ortogonaalsed argumendi x_2 järgi. Järelikult intervalli 000- laiendamisel peab x_2 säilitama oma väärtuse (x_2 =0). Intervall 000- on ortogonaalne intervalliga 1011 argumentide x_1 ja x_3 järgi. Järelikult peab säilitama oma väärtuse kas x_1 =0 või x_3 =0 ning intervalli 000- laienduseks võivad olla intervallid 00-- või -00-. Analoogselt laiendame intevalli 0-01. Võimalikud laiendused on 0--1 või --01. Valime lahendisse esimesena märgitud laiendused:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} 1\_intervallides\_00--, 0--1 \\ 0\_ülejäänud\_määramispiirkonnas \end{cases}$$

ehk

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_4$$

Ülesanne
Proovige sama funktsiooni minimeerida teiste Teile tuntud minimeerimismeetoditega. Selgitage endale kirjeldatud heuristilise meetodi olemus.

- Näide 2

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{cases} 1\_intervallides\_01-0-,001-0,-010- \\ 0\_intervallides\_110-1,000-1,1001- \\ -\_ülejäänud\_määramispiirkonnas \end{cases}$$

Minimeerige funktsioon kõigi tuntud meetoditega. Hinnake, milline meetod sobib kõige paremini.

Kontrolllahendus: funktsioon jääb sõltuma kolmest argumendist $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_3$.

- Näide 3

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \begin{cases} 1\_intervallides\_0-000-,11--10,--1010 \\ 0\_intervallides\_--100-,001-0-,010010 \\ -\_ülejäänud\_määramispiirkonnas \end{cases}$$

Leida minimaalne DNK (kontrolllahend: $\bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee x_1 x_5 \vee x_3 x_5$) ja minimaalne KNK. Seejuures märgime, et KNK leidmine toimub samade ideede alusel, kusjuures laiendatakse maksimaalselt nullide intervalle, garanteerides seejuures mittekattuvus ühtede intervallidega.

Loogikafunktsioonide täielik süsteem

Eelnevast on teada, et suvaline loogikafunktsioon on esitatav DNK ja KNK kujul. Järelikult on suvaline funktsioon kujutatav läbi funktsioonide &, V ja $\bar{\ }$.
Loogikafunktsioonide süsteemi, mille abil on võimalik kujutada suvalise keerukusega loogikafunktsiooni, nimetatakse täielikuks süsteemiks.

Olgu antud loogikafunktsioonide süsteem S:
S={ $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n1})$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n2})$,...., $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_{nm})$}

- Süsteemi S superpositsiooniks nimetatakse funktsiooni f, mis on saadud süsteemi S funktsioonidest järgnevalt:

1. funktsiooni $f_i \in$ S muutujate ümbernimetamisega;
2. funktsiooni $f_j \in$ S mõne muutuja asendamisega funktsiooniga $f_k \in$ S ;
3. eelneva kahe tegevuse korduval rakendamisel.

- Süsteemi S nimetatakse täielikuks, kui suvaline funktsioon $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on esitatav läbi süsteemi S superpositsiooni.

- Täielik süsteem S on baassüsteem, kui tema täielikkus kaob suvalise funktsiooni $f_i \in$ S eemaldamisel süsteemist S.

Süsteemi S täielikkuse analüüs nõuab järgneva viie funktsioonide klassi defineerimist. Kasutame iga klassi illustreerimisel eelpööl kirjeldatud kahe muutuja funktsioonide hulka $\{ f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{15} \}$

- Klass K_0 - nulli säilitavate loogikafunktsioonide klass.

$K_0 = \{ f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid f_i(0,0,\ldots,0) = 0\}$
$\{ f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 \} \subset K_0$

- Klass K_1 - ühte säilitavate loogikafunktsioonide klass.

$K_1 = \{ f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid f_i(1,1,\ldots,1) = 1\}$
$\{ f_1, f_3, f_5, f_7, f_9, f_{11}, f_{13}, f_{15} \} \subset K_1$

- Klass K_{lin} - lineaarsete loogikafunktsioonide klass.

$K_{lin} = \{ f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus \ldots \oplus c_nx_n \}$, kus $c_i \in \{0,1\}$

Seega iga lineaarse funktsiooni jaoks eksisteerib selline kahendvektor $\{c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, et funktsioon on esitatav definitsioonis toodud lineaarpolünoomina. Kõikvõimalikest n-argumendi loogikafunktsioonidest on lineaarseid funktsioone 2^{n+1} .
$\{ f_0, f_3, f_5, f_6, f_9, f_{10}, f_{12}, f_{15} \} \subset K_{lin}$

- Klass K_d - iseendaga duaalsete funktsioonide klass

Kaks loogikafunktsioonid $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ja $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on omavahel duaalsed, kui $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}_j\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\right)$
$K_d = \{ f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}_i\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\right) \}$
$\{ f_3, f_5, f_{10}, f_{12} \} \subset K_d$

- Klass K_{mon} - monotoonsete loogikafunktsioonide klass

$K_{mon} = \{ f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \left(\alpha_i \geq \beta_i, i = 1,\ldots,n\right) \rightarrow \left(f_i\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) \geq f_i\left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\right)\right) \}$
Iga loogikafunktsioon, mis ei sisalda DNK kujus inversioone, on monotoonne ning vastupidi, iga monotoonne loogikafunktsioon on esitatav DNK-na, mis ei sisalda inversioone.
$\{ f_0, f_1, f_3, f_5, f_7, f_{15} \} \subset K_{mon}$

- Loogikafunktsioonide klass S on suletud, kui suvaline selle klassi funktsioonide superpositsioon kuulub samuti klassi S.

Klassid K_{lin} ja K_{mon} on suletud klassid.

- Süsteem S on nõrgalt täielik, kui ta võimaldab pärast konstantfunktsioonide f_0=0 ja f_{15}=1 lisamist esitada suvalist funktsiooni $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ läbi süsteemi $\{S, f_0, f_{15}\}$ superpositsiooni.

- Selleks, et süsteem S oleks nõrgalt täielik, on piisav ja tarvilik, et ta sisaldaks ühte mittemonotoonset ja ühte mittelineaarset funktsiooni.

Näiteks süsteem $\{\&, \oplus\}$ on nõrgalt täielik, kuna & on mittelineaarne ja $\oplus$ mittemonotoonne.

- Selleks, et süsteem S oleks tugevalt täielik (edasises täielik), on piisav ja tarvilik, et ta sisaldaks nulli mittesäilitavat funktsiooni, ühte mittesäilitavat funktsiooni, mittelineaarset funktsiooni, mittemonotoonset funktsiooni ja iseendaga mitteduaalset funktsiooni.

Märgime, et kuna f_0 on ühte mittesäilitav, f_{15} nulli mittesäilitav ning mõlemad funktsioonid on iseendaga mitteduaalsed, siis muutub nõrgalt täielik süsteem (sisaldab mittelineaarset ja mittemonotoonset funktsiooni) täielikuks f_0 ja f_{15} lisamisel.

Baassüsteemid

Vaatleme kõigi kahe muutuja funktsioonide hulga alamhulka:

$\{ f_0, f_1, f_6, f_7, f_8, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15} \}$.

Toodud alamhulgas on esindatud kõik tähtsamad funktsioonid. Järgnevas toome välja kõik baassüsteemid, mis on võimalik moodustada nimetatud alamhulga funktsioonidest.

Funktsioonid f_8 (Pierce'i funktsioon) ja f_{14} (Shefferi funktsioon) ei kuulu ühtegi eelpool vaadeldud viiest funktsioonide klassist. Järelikult on võimalik moodustada kaks ühe funktsioonilist baassüsteemi:

- Pierce'i baas $B_1 =\{ f_8 \}$
- Shefferi baas $B_2 =\{ f_{14} \}$

Ülejäänud funktsioonide baasil on võimalik klassidesse mittekuuluvuse alusel moodustada veel seitse baassüsteemi.

- Konjunktiivne baas $B_3 =\{ f_1 , f_{12} \}$
- Disjunktiivne baas $B_4 =\{ f_7 , f_{12} \}$
- Implikatiivsed baasid $B_5 =\{ f_{12} , f_{13} \}$, $B_6 =\{ f_0 , f_{13} \}$, $B_7 =\{ f_6 , f_{13} \}$
- Read-Mülleri baas (Zhegalkini baas) $B_8 =\{ f_1 , f_6 , f_{15} \}$
- $B_9 =\{ f_6 , f_7 , f_{15} \}$

Baaside leidmiseks võib kasutada katteülesande modifikatsiooni, kus veergudeks on vastavasse klassi mittekuuluvus, ridadeks aga vaadeldav funktsioonide alamhulk. Baassüsteemi moodustavad funktsioonid (read), mis katavad mittekuuluvuse kõigisse viide klassi.

Loogikafunktsiooni esitamine baassüsteemides

Olgu antud funktsioon DNK kujul (või KNK kujul):

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1 \vee \overline{x}_2 x_3 = \left(x_1 \vee \overline{x}_2\right)\left(x_1 \vee x_3\right)$$

Esitame funktsiooni $f(x_1, x_2, x_3)$ baassüsteemides B_1 kuni B_9 .

- $B_1 =\{ f_8 \}$

Teisenduseks on sobivaim lähtuda KNK-st, inverteerida funktsiooni kahekordselt ning rakendada De Morgani seadust.

Resultaat: $f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \downarrow \left(x_2 \downarrow x_2\right)\right) \downarrow \left(x_1 \downarrow x_3\right)$

- $B_2 =\{ f_{14} \}$

Teisenduseks sobib funktsiooni DNK-d inverteerida kahekordselt ja rakendada De Morgani seadust.

Resultaat: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1|x_1)|((x_2|x_2)|x_3)$

- $B_3 = \{ f_1 , f_{12} \}$

Lähtuda võib suvalisest normaalkujust, ellimineerides mittelubatud disjunktsiooni. Erinevus baasist B_2 seisneb selles, et baas B_3 lubab kasutada "puhast" konjunktsiooni (ilma inversioonita).

Resultaat: $f(x_1, x_2, x_3) = \left(\overline{\overline{x}_1 \& x_2}\right) \& \left(\overline{\overline{x}_1 \& \overline{x}_3}\right)$

- $B_4 = \{ f_7 , f_{12} \}$

Teisendus analoogiline teisendusega baassüsteemi B_3 . Erinevusena baasist B_1 märgime "puhta" disjunktsiooni kasutamise võimalust.

Resultaat: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \left(\overline{x_2 \vee \overline{x}_3}\right)$

- $B_5 = \{ f_{12} , f_{13} \}$

Teisenduseks kasutame järgmisi abivalemeid:

$x_1 \vee x_2 = \overline{x}_1 \to x_2$

$x_1 \& x_2 = \overline{x_1 \to \overline{x}_2}$

Resultaat: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 \to x_2) \to x_1$

Märgime, et resultaadi minimaalsus sõltub DNK liikmete paigutusest ja asenduste sooritamise järjekorrast.

- $B_6 = \{ f_0 , f_{13} \}$

Kasulikud on järgmised abivalemid:

$\overline{x} = x \to 0$

$x_1 \vee x_2 = (x_1 \to 0) \to x_2$

$x_1 \& x_2 = (x_1 \to (x_2 \to 0)) \to 0$

$(x_1 \to 0) \to (x_2 \to 0) = x_2 \to x_1$

Resultaat: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to 0) \to ((x_3 \to x_2) \to 0) = (x_3 \to x_2) \to x_1$

- $B_7 = \{ f_6 , f_{13} \}$

Teisendus sellesse baassüsteemi on eelneva põhjal iseseisvaks tööks.

- $B_8 = \{ f_1 , f_6 , f_{15} \}$

Read-Mülleri ehk Zhegalkini baasile vastab algebra, kus kehtivad järgnevad seosed:

Kommutatiivsus: $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$

Distributiivsus: $x_1 \& (x_2 \oplus x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3$

$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_2) = x_1$

Teisendusel kasulikud abivalemid:

$\overline{x} = x \oplus 1$

$x_1 \vee x_2 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$

Resultaat: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_3$

Kui vaadeldavas algebras analoogiliselt eelmise näitega avada sulud, saame normaalkuju sarnase avaldise, kus disjunktsiooni asemel kasutatakse funktsiooni $\oplus$ ja puuduvad argumentide inversioonid. See on loogikafunktsiooni Read-Mülleri polünoom.

- Iga loogikafunktsiooni jaoks eksisteerib täpselt 1 Read-Mülleri polünoom (analoogiliselt täielike DNK ja KNK-ga).

Märgime, et kui f_i & $f_j = 0$, siis $f_i \vee f_j = f_i \oplus f_j$. See seos annab võimaluse meile tuntud meetoditega tuletada Read-Mülleri polünoom näiteks Karnaugh' kaardilt. Selleks on vaja kontuuride moodustamisel mitte lubada nende kattumist (kattumine tähendaks seda, et eksisteerib sisendvektor, mis muudab "1"-ks mõlemale kontuurile vastavad konjunktsioonid). Mittekattuvad kontuurid esitavad Read-Mülleri polünoomiks sobivaid konjunktsioone, millistes aga on osa argumente inverteeritud. Korrektse Read-Mülleri polünoomi saamiseks peame inversioonid abivalemiga asendama ning sulud lõplikult avama.

Näide

$$x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 = x_1\bar{x}_2 \oplus x_2\bar{x}_3 = x_1(x_2 \oplus 1) \oplus x_2(x_3 \oplus 1) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_2$$

- $B_9 = \{ f_6 , f_7 , f_{15} \}$

Teisendus jääb eelneva põhjal iseseisvaks tööks.

Ülesanded

- Esitada funktsioon $f(x_1 ,x_2 ,x_3, x_4) = \Sigma(0,1,4,5,6,12,14)_1$ baassüsteemides B_1 kuni B_9 .

- Kontrollida, kas järgmised loogikafunktsiooide süsteemid on täielikud. Kas nad kujutavad baassüsteeme? Kui mõni süsteem pole täielik, näidata mitte täielikkuse põhjus.

$\{ f_0 , f_1 , f_9 \}$
$\{ f_9 , f_{12} , f_{13} \}$
$\{ f_6 , f_7 \}$
$\{ f_1 , f_7 , f_{13} \}$
$\{ f_0 , f_6 , f_{12} , f_{15} \}$
$\{ f(x_1 ,x_2 ,x_3, x_4) = \Sigma(0,3,7,11,13)_1 \}$
$\{ f_1 = \bar{x}; f_2 = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3 \}$

- Tuua näiteks kolme muutuja loogikafunktsioon, mis on:
  - monotoonne ja lineaarne;
  - iseendaga duaalne ja lineaarne.

- Antud nelja muutuja loogikafunktsioon :

$$f(x_1 ,x_2 ,x_3, x_4) = \overline{\left(\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4}\right) \vee \left(\overline{x_2 \vee x_3 \vee x_4}\right) \vee \left(\overline{x_1 \vee x_2}\right)}$$

Leida funktsiooni $f(x_1 ,x_2 ,x_3, x_4)$ minimaalsed DNK ja KNK ning kümnendesitusvorm.
Esitada funktsioon $f(x_1 ,x_2 ,x_3, x_4)$ baassüsteemides B_1 , B_5 ja B_9 .

Loogikafunktsioonide Shannoni arendus

Loogikafunktsiooni täielik arendus annab resultaadina täieliku DNK (või KNK).

- <u>Arendusvalemid:</u>

1. Täielik disjunktiivne arendus

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=00\dots0}^{11\dots1} \left(\mathop{\&}_{i=1}^{n} (x_i)^{\alpha_i} \,\&\, f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \right)$$

2. Täielik konjunktiivne arendus

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathop{\&}_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=00\dots0}^{11\dots1} \left(\bigvee_{i=1}^{n} (\bar{x}_i)^{\alpha_i} \vee f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \right)$$

<u>Näide</u>

Antud loogikafunktsioon $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3$

Täielik disjunktiivne arendus:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = {} & \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \,\&\, f(0,0,0) \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \,\&\, f(0,0,1) \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \,\&\, f(0,1,0) \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \,\&\, f(0,1,1) \vee \\ & \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \,\&\, f(1,0,0) \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \,\&\, f(1,0,1) \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \,\&\, f(0,0,0) \vee x_1 x_2 x_3 \,\&\, f(1,1,1) = \\ & = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \end{aligned}$$

Täielik konjunktiivne arendus:

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \overline{x_2} \vee \bar{x}_3)$

3. Osaline disjunktiivne arendus argumentide $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ järgi:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)=00\dots0}^{11\dots1} \left(\mathop{\&}_{i=1}^{k} (x_i)^{\alpha_i} \,\&\, f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \right)$$

4. Osaline konjunktiivne arendus argumentide $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ järgi:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathop{\&}_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)=00\dots0}^{11\dots1} \left(\bigvee_{i=1}^{k} (\bar{x}_i)^{\alpha_i} \vee f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \right)$$

<u>Näide</u>

Antud loogikafunktsioon $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3$

Disjunktiivne arendus argumendi x_1 järgi: $\bar{x}_1 (x_2 \vee x_3) \vee x_1 (x_4)$

Disjunktiivne arendus argumendi x_2 järgi: $\bar{x}_2 (x_1 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3) \vee x_2 (\bar{x}_1 \vee x_4)$

Disjunktiivne arendus argumendipaari (x_1 x_2)järgi: $\bar{x}_1 \bar{x}_2 (x_3) \vee \bar{x}_1 x_2 (1) \vee x_1 \bar{x}_2 (x_4) \vee x_1 x_2 (x_4)$

Konjunktiivne arendus argumendi x_1 *järgi:* $(x_1 \vee (x_2 \vee x_3))(\bar{x}_1 \vee (x_4))$

Sulgudes arendusargumentide järel on nn. jääkfunktsioonid. Jääkfunktsioon näitab, milliseks muutub vaadeldav funktsioon, kui arendusargumentidele on omistatud konstantsed väärtused.

Loogikafunktsiooni tuletis

Loogikafunktsiooni $f(x_1, x_2,..., x_n)$ tuletis argumendi x_i on määratud järgmise valemiga:

$$\frac{\partial\left(f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right)}{\partial\left(x_i\right)} = f\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n\right) \oplus f\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n\right)$$

Näide

Antud loogikafunktsioon $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma\,(3,4,5,6,7,8,10,12,14)_1$

$$\frac{\partial\left(f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)\right)}{\partial\left(x_1\right)} = \left(x_2 \vee x_3 x_4\right) \oplus \left(\overline{x}_4\right) = x_2 x_4 \vee x_3 x_4 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_4$$

Loogikafunktsiooni tuletis argumendi x_i järgi määrab loogikatingimused, milliste puhul funktsiooni väärtus on tundlik argumendi x_i muutuste suhtes (kas otse- või vastandfaasis).

Ülesanded

- Antud loogikafunktsioon $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1 \to \left(x_2 \to x_3\right)\right) \& \overline{x}_4$

Leida Shannoni osaline disjunktiivne arendus argumendipaari (x_1,x_4) järgi ja konjunktiivne arendus argumendipaari (x_2,x_3) järgi.

- Antud loogikafunktsioon $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma\,(0,1,2,4,7,8,11,15)_1$

Leida funktsiooni tuletis $\dfrac{\partial\left(f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)\right)}{\partial\left(x_i\right)}, i = 1,2,3,4$