

Viies peatükk

JÄIGA KEHA MEHAANIKA

§ 34. JÄIGA KEHA LIIKUMINE¹

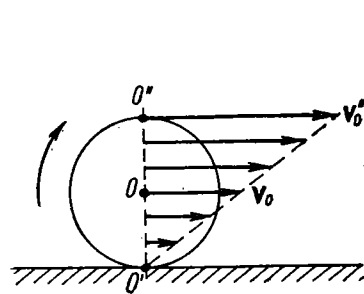
Sissejuhatuses tutvusime jäiga keha liikumise kahe põhivormiga — kulgliikumise ja pöörlemisega.

Kulgliikumisel saavad kõik keha punktid sama aja jooksul võrdse ning samasuunalise nihke, mistõttu kõikide punktide kiirus ja kiirendus on igal ajahetkel ühesugune. Seepärast piisab kogu keha liikumise täielikuks iseloomustamiseks selle keha ühe punkti (näiteks tema inertsiokesme) liikumise määramisest.

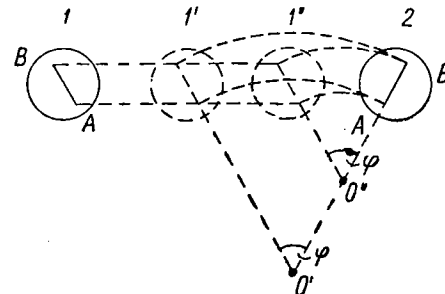
Pöörlemisel liiguvad jäiga keha kõik punktid mööda ringjooni, nende ringjoonte tsentrid asetsevad ühel sirgel, mida nimetatakse pöörlemisteljeks. Pöördliikumise kirjeldamiseks peab määrama pöörlemistelje asendi ruumis ning keha nurkkiiruse igal ajahetkel.

Selgub, et keha igasugust liikumist võib vaadelda kui ülalnimetatud kahe liikumisvormi summat. Tõestame seda tasapinnalise liikumise korral, s.o. juhul, kus keha kõik punktid liiguvad paralleelsetes tasapindades. Tasapinnalise liikumise näiteks võib olla silindri veeremine mööda tasapinda (joon. 82).

Jäiga keha suvalist üleminekut asendist 1 asendisse 2 (joon.



Joon. 82



Joon. 83

¹ Peale § 45 peetakse selles peatükis kõikjal silmas absoluutselt jäika keha.

83) võib kujutada kui kahe ülemineku summat: kulgliikumist asendist 1 asendisse 1' või 1'' ning seejärel pöördumist telje O' või O'' ümber. Ilmselt on niisuguseid liikumise lahutamise võimalusi kulgliikumiseks ja pöörlemiseks loendamatu hulk, kuid igal juhul toimub pöördumine ühe ja sama nurga φ võrra.

Vastavalt eespool öeldule võib keha mingi punkti elementaarnihke ds lahutada kaheks nihkeks — «kulgnihe» ds_k ja «pöördnihe» ds_p :

$$ds = ds_k + ds_p,$$

kusjuures ds_k on keha kõikide punktide puhul sama.

Niisugust nihke ds lahutamist võib teostada mitmel viisil, kusjuures pöördnihe ds_p teostub igal juhul keha pöördumisega sama nurga $d\varphi$ võrra (kuid erinevate telgede suhtes), ds_k ja ds_p aga osutuvad erinevateks.

Jaganud ds vastava ajavahemikuga dt , saame punkti kiiruse v :

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds_k}{dt} + \frac{ds_p}{dt} = v_0 + v',$$

kus v_0 on keha kõikide punktide jaoks ühesugune kulgliikumise kiirus ning v' pöörlemisest tingitud kiirus, mis on keha eri punktide jaoks erinev.

Seega saab jäiga keha tasapinnalist liikumist kujutada kahe liikumise summana: need on kulgliikumine kiirusega v_0 ja pöörlemine nurkkiirusega ω (joonisel 82 on vektor ω risti joonise tasapinnaga ning suunatud joonise taha). Selliselt võib liitliikumist kujutada mitmel viisil, mis kõik erinevad v_0 ja v' väärtuste poolest, kuid vastavad alati samale nurkkiirusele ω . Näiteks võib tasapinda mööda libisemiseta veereva silindri liikumist (joon. 82) kujutada kui kulgliikumist kiirusega v_0 ja samaaegset pöörlemist nurkkiirusega ω ümber telje O, või kulgliikumist kiirusega $v'_0 = 2v_0$ ja pöörlemist sama nurkkiirusega ω ümber telje O'' või kui ainult pöörlemist ikka sama nurkkiirusega ω ümber telje O'.

Nimetanud liikumatuks selle taustsüsteemi, mille suhtes jäiga keha liitliikumist vaatleme, võime keha liikumist kujutada kui pöörlemist nurkkiirusega ω taustsüsteemis, mis on selle liikumatu taustsüsteemi suhtes kulgliikumises kiirusega v_0 .

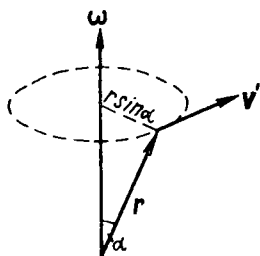
Joonkkiirus v' , millega jäiga keha pöörlemisest tingitult liigub selle keha punkt raadiusvektoriga r , on (joon. 84)

$$v' = [\omega r].$$

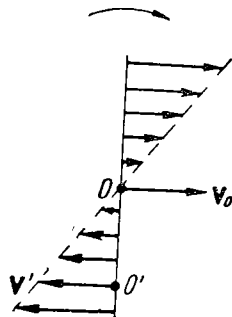
Järelikult saab selle punkti kiiruse keha liitliikumisel esitada kujul

$$v = v_0 + [\omega r]. \quad (34.1)$$

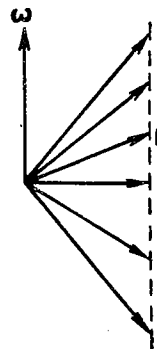
On selliseid punkte (need võivad asuda kas keha sees või



Joon. 84



Joon. 85



Joon. 86

väljaspool keha), mis, võttes osa mõlemast, nii kulg- ja pöörliikumisest, jäävad liikumatuks. Tõepoolest, antud v_0 ja ω puhul võib alati leida niisuguse r , et avaldis (34.1) saab võrdseks nulliga. Olgu kulgliikumises oleva taustsüsteemi kiirus antud hetkel v_0 (joon. 85). Keha pöörleb selles süsteemis noolega näidatud suunas nurkkiirusega ω . Pöörlemisest tingitud joonkiirus v' on eri punktide jaoks kujutatud joonisel. Punkti O' puhul on kiirused v_0 ja v' suuruse poolest võrdsed ning suuna poolest vastupidised. Järelikult on selle punkti kiirus liikumatu taustsüsteemi suhtes null.

Kui on olemas kas või üksainus raadiusvektor r , mis vektoriliselt korrutatuna nurkkiirusega ω annab vektori $-v_0$, siis leidub veel mitu vektori, mille vektorkorrutised nurkkiirusega ω annavad sama tulemuse; vektori ω vektorkorrutised igaühega joonisel 86 kujutatud vektoritest on sama suuruse ja suunaga. Punktide, mis on määratud nende raadiusvektoritega, on antud hetkel liikumatud. Need punktid, nagu näha jooniselt, asetsevad ühel sirgel ja moodustavad nõndanimetatud pöörlemise hetkkelje. Pöörlemise hetkkelje asend liikumatu taustsüsteemi ning ka keha enese suhtes üldjuhul muutub ajaga. Veereva silindri korral (joon. 82) ühtib hetkkelg O' silindri ja tasapinna puutejoonega. Silindri veeremisel nihkub see hetkkelg nii mööda tasapinda, s. o. liikumatu taustsüsteemi suhtes, kui ka mööda silindri pinda.

Keha kõikide punktide kiirusi igal ajahetkel võib pidada tingituks pöörlemisest vastava hetkkelje ümber. Järelikult võib jäiga keha tasapinnalist liikumist vaadelda kui tervet rida järjestikku toimuvaid elementaarpöörlemisi hetkkelgede ümber.

Üldjuhul võib iga liikumist (mitte ainult tasapinnalist) kujutada kui pöörlemist ümber hetkkelje ning samaaegset nihkumist piki seda telge.

§ 35. JÄIGA KEHA INERTSIKESKME LIIKUMINE

Jaganud keha elementaarosadeks igaüks massiga Δm_i , võib seda keha kujutada kui ainepunktidest koosnevat süsteemi, milles nende punktide vastastikune asetus jääb muutumatuks. Igaühele ainepunktidest võivad mõjuda nii sisejõud, mis on tingitud selle punkti interaktsioonist vaadeldava keha teiste ainepunktidega, kui ka välisjõud. Näiteks kui keha asub Maa raskusväljas, mõjub igale ainepunktile massiga Δm_i välisjõud $\Delta m_i g$.

Kirjutame iga ainepunkti kohta Newtoni teise seaduse

$$\Delta m_i w_i = f_i + F_i, \quad (35.1)$$

kus f_i on kõikide antud punktile rakendatud sisejõudude resultant, F_i aga sellele punktile rakendatud välisjõudude resultant. Liites keha kõikide elementaarosade kohta kirjutatud võrrandid (35.1), saame:

$$\sum \Delta m_i w_i = \sum f_i + \sum F_i. \quad (35.2)$$

Kuid kõikide antud süsteemis mõjuvate sisejõudude summa on null. Seepärast lihtsustub võrrand (35.2) kujule

$$\sum \Delta m_i w_i = \sum F_i, \quad (35.3)$$

kus võrrandi parem pool on kõikide kehale mõjuvate välisjõudude resultant. Võrrandi (35.3) vasakul poolel oleva summa võib asendada keha massi m ja tema inertsikeskme kiirenduse w_c korrutisega. Tõepoolest, inertsikeskme raadiusvektor on selle definitsiooni kohaselt (vt. 23.1))

$$r_c = \frac{\sum \Delta m_i r_i}{m}.$$

Diferentseerinud seost kaks korda aja järgi ning arvestanud, et $\ddot{r}_c = w_c$ ja $\ddot{r}_i = w_i$, võime kirjutada:

$$m w_c = \sum \Delta m_i w_i. \quad (35.4)$$

Seega

$$m w_c = \sum F_i, \quad (35.5)$$

kust järeldub, et jäiga keha inertsikeske liigub nii, nagu liiguks kõikide antud kehale rakendatud jõudude mõjul ainepunkt, mille mass on võrdne selle keha massiga.

Võrrand (35.5) võimaldab määrata jäiga keha inertsikeskme liikumise, kui on teada selle keha mass ja temale mõjuvad jõud. Kulgliikumise korral määrab võrrand niihästi inertsikeskme kui ka keha iga punkti kiirenduse.

§ 36. JÄIGA KEHA PÖÖRLEMINE. JÕUMOMENT

Et selgusele jõuda, mis määrab keha pöörlemise liikumatu telje suhtes, vaatleme järgmist katset. Võtame ristmiku, s.o. ristikujulise keha, mille otstes on võrdse massiga m koormused (joon. 87). Risti keskele on kinnitatud astmeline rihmarattas. Ristmiku koos rihmarattaga asetame horisontaalsele teljele ning jälgime, et hõõrdumine pöörlemisel ümber telje oleks tähtsusetult väike.

Kinnitame niidi otsa rihmaratta ühele astmele, mähime niidi ümber ratta ning, asetanud niidi vaba otsa üle horisontaalsel teljel oleva plokiratta, riputame selle otsa koormuse P . Kui vabastada koormus P , hakkab ristmik pöörlema järjest suureneva nurkkiirusega ω , kusjuures pöörlemine on ühtlaselt kiirenev.

Muutes koormust P , ratta raadiust l , ristmikule kinnitatud koormuste massi m ning nende kaugust pöörlemisteljest R , uurime, kuidas need faktorid mõjutavad nurkkiirendust β . Nii-suguse uurimise tulemusena selgub, et nurkkiirendus β

- 1) on võrdeline niidi pingusega f ja ratta raadiusega l ;
- 2) pöördvõrdeline koormuste massidega m ja nende kauguse R ruuduga pöörlemisteljest.

Järelikult sõltub pöörlemise kiirendus peale kehale mõjuva jõu f veel pöörlemistelje ja jõu mõjusirge vahelisest kaugusest l . Korrutis fl annab nn. jõu momendi pöörlemistelje suhtes.

Katsest selgub samuti, et nurkkiirendust mõjutab nii pöörleva keha mass kui ka massi jaotus pöörlemistelje suhtes. Suurust, mis arvestab mõlemat asjaolu, nimetatakse keha inertsimomendiks pöörlemistelje suhtes.

Seega tuleb pöördliikumise uurimisel vaadelda kaht uut füüsikalist suurust — jõumomenti ja inertsimomenti.

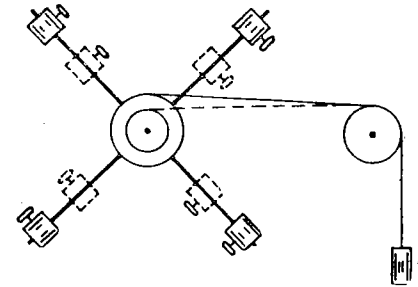
Alustame jõumomendi mõiste selgitamisest. Inertsimomenti käsitleme järgmistes paragrahvides.

Jõumoment punkti suhtes. Jõu f momendiks antud punkti O suhtes nimetatakse vektorilist suurust \mathbf{M} , mille määrab avaldis

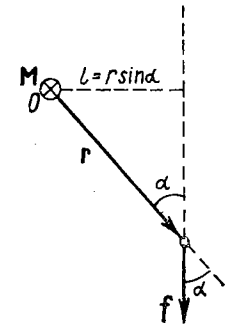
$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}f], \quad (36.1)$$

kus \mathbf{r} on punktist O jõu rakenduspunkti tõmmatud raadiusvektor. Seda definitsiooni selgitava joonise 88 puhul on eeldatud, et punkt O , mille suhtes moment määratakse, ja jõuvektor f asuvad joonise tasapinnas. Siis on ka vektor \mathbf{r} samas tasapinnas, vektor \mathbf{M} aga risti joonise tasapinnaga ning suunatud joonise taha. Vektorit \mathbf{M} kujutab ringike ristiga sees.¹

¹ Edaspidi kujutame joonise tasapinnaga risti olevaid vektoreid ringikestega, mille sees on rist, kui vektor on suunatud joonise taha, või punkt, kui vektor on suunatud meie poole. Et asi piltlikum oleks, kujutleme vektorit noolena, mille otsikuks on koonus ning sabaks ristuvad juhtpinnad. Kui vektor on suunatud (nool lendab) meie poole, näeme ringikest punktiga keskel, kui aga vektor on suunatud (nool lendab) meist eemale, paistab meile ringike ristiga sees.



Joon. 87



Joon. 88

Definitsioonist (35.1) järeldub, et \mathbf{M} on aksiaalvektor. Tema suund on valitud nii, et pöörlemine punkti O ümber jõu suunas ja vektor \mathbf{M} on seotud krüvireegli järgi.

Vektori \mathbf{M} moodul

$$M = rf \sin \alpha = lf, \quad (36.2)$$

kus α on vektorite \mathbf{r} ja \mathbf{f} vaheline nurk, $l = r \sin \alpha$ punktist O jõu mõjusirgele tõmmatud ristlõigu pikkus (vt. joon. 88). Seda pikkust nimetatakse jõu õlaks punkti O suhtes.

Jõumomendi ja selle mooduli valemitele (36.1) ja (36.2) võib anda teise kuju. Selleks lahutame jõuvektori \mathbf{f} kaheks komponendiks, millest \mathbf{f}_r on kollineaarne vektoriga \mathbf{r} ning \mathbf{f}_τ sellega risti (joon. 89). Kui kujutleda ringjoont raadiusega r ning tsentriga punktis O , siis komponent \mathbf{f}_τ on suunatud mööda ringjoone puutujat. Asendame valemis (36.1) vektori \mathbf{f} summaga $\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_\tau$ ning kasutame vektorkorrutise distributiivsuseomadust:

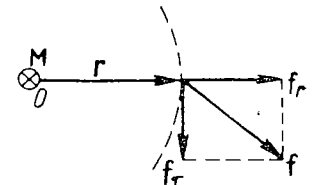
$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}f] = [\mathbf{r}, (\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_\tau)] = [\mathbf{r}, \mathbf{f}_r] + [\mathbf{r}, \mathbf{f}_\tau].$$

Esimene korrutis on võrdne nulliga, sest vektorid \mathbf{r} ja \mathbf{f}_r on kollineaarsed. Järelikult avaldub jõumoment punkti suhtes kujul:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{f}_\tau]. \quad (36.3)$$

Kuna vektorid \mathbf{r} ja \mathbf{f}_τ on omavahel risti, siis vektori \mathbf{M} moodul

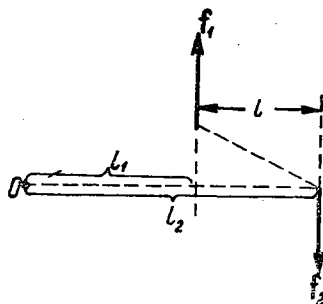
$$M = rf_\tau. \quad (36.4)$$



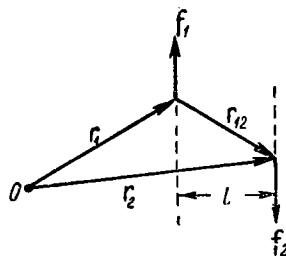
Joon. 89

Vektorkorrutise distributiivsusest järeldub, et ühes punktis rakendatud jõudude summa moment võrdub liidetavate jõudude momentide summaga:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = [\mathbf{r}f] &= [\mathbf{r}, (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \dots)] = [\mathbf{r}\mathbf{f}_1] + [\mathbf{r}\mathbf{f}_2] + \dots = \\ &= \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots \end{aligned} \quad (36.5)$$



Joon. 90



Joon. 91

Jõupaari moment. Jõupaariks nimetatakse kahte suuruselt võrdset ning suunalt vastupidist jõudu, mille mõjusirged ei ühti (joon. 90). Jõudude mõjusirgete vahelist kaugust l nimetatakse jõupaari olaks. Tõestame, et jõupaari moment mistahes punkti suhtes on sama. Võtame esialgu punkti, mis asub jõudude tasapinnas (vt. joon. 90). Tähistame jõudude f_1 ja f_2 ühesuguse mooduli tähega f . Jõu f_1 moment on fl_1 ning suunatud meie poole, jõu f_2 moment on fl_2 ning suunatud joonise taha. Summaarne moment on suunatud joonise taha ning on võrdne

$$M = fl_2 - fl_1 = f(l_2 - l_1) = fl.$$

Saadud avaldis ei sõltu punkti O asukohast jõudude mõjusirgetega määratud tasapinnas.

Nüüd valime punkti O täiesti suvaliselt (joon. 91). Tõmbame sellest punktist raadiusvektorid r_1 ja r_2 jõudude f_1 ja f_2 rakenduspunktidesse. Jõu f_1 rakenduspunkti tõmbame jõu f_2 rakenduspunkti raadiusvektori r_{12} . Ilmselt

$$r_2 = r_1 + r_{12}. \quad (36.6)$$

Jõudude f_1 ja f_2 summaarne moment

$$M = [r_1 f_1] + [r_2 f_2].$$

Asendanud r_2 avaldisest (36.6) ning kasutanud vektorkorrutise distributiivsuseomadust, võime kirjutada:

$$M = [r_1 f_1] + [(r_1 + r_{12}) f_2] = [r_1 f_1] + [r_1 f_2] + [r_{12} f_2].$$

Kuna $f_1 = -f_2$, siis kaks esimest korrutist on võrdsed ja vastandmargilised ning lõplikult

$$M = [r_{12} f_2].$$

Seega on jõupaari moment risti jõudude mõjusirgetega mää-

ratud tasapinnaga (joon. 92) ning arvuliselt võrdne jõu mooduli ja jõupaari ola korrutisega.

Jõumoment telje suhtes. Kui keha saab suvalisel viisil pöörelda punkti O ümber, siis ta pöörduv jõu f mõjul telje ümber, mis on risti jõudu f ja punkti O sisaldava tasapinnaga, s. o. niisuguse telje ümber, mis ühtib antud punkti suhtes määratud jõumomendi suunaga. Momendi suurus iseloomustab jõu võimet pöörata keha selle telje ümber.

Kui keha saab pöörelda ainult teatud fikseeritud telje ümber, siis iseloomustatakse jõu võimet niisugust pöörlemist esile kutsuma jõumomendiga telje suhtes.

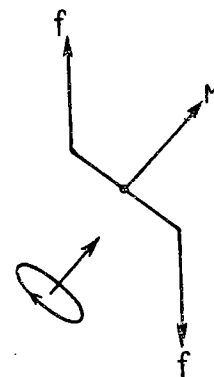
Et selgitada, mis on jõu f moment telje suhtes, leiame jõumomendi punkti O suhtes ning joonestame selle momendi vektori M punktist O (joonisel 93 oletatakse, et vektorid f , r ja M ei asu joonise tasapinnas). Tõmbame läbi punkti O telje, tähistame selle tähega z ning lahutame vektori M kaheks komponendiks, millest M_z on teljega paralleelne¹ ning M_\perp sellega risti.

Jõumomendiks telje suhtes nimetatakse teljel asuva punkti O suhtes määratud jõumomendi z -teljega paralleelset komponenti. Tähistanud jõumomendi telje suhtes M_z , võime kirjutada:

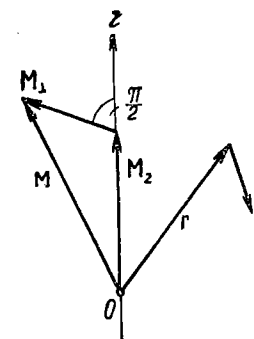
$$M_z = [rf]_z. \quad (36.7)$$

Antud M korral sõltuvad vektori M_z suurus ja suund telje z valikust. Kui telg z ühtib vektori M suunaga, siis on M_z võrdne vektoriga M , kui telg z on risti vektoriga M , siis $M_z = 0$.

Vektori M_z avaldise (36.7) võib teha näitlikumaks. Selleks

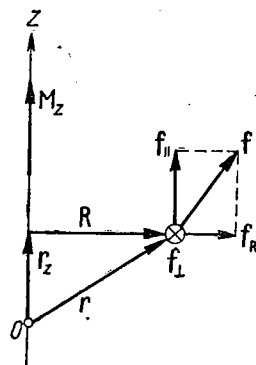


Joon. 92

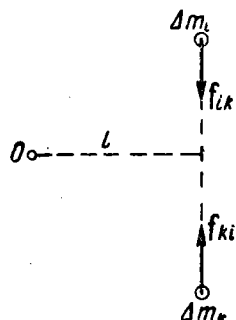


Joon. 93

¹ Komponenti M_z peab eristama vektori M projektsioonist teljel z , mida tähistatakse sümboliga M_z . M_z on vektor, M_z aga skalaarne suurus; nende vahel valitseb lihtne seos: $M_z = e_z M_z$, kus e_z on telje z ühikvektor (seda ühikvektori tähistatakse ka sümboliga k ; vt. valemit (2.8)).



Joon. 94



Joon. 95

esitame raadiusvektori \mathbf{r} kahe komponendi summana, millest \mathbf{r}_z on teljega paralleelne ning \mathbf{R} sellega risti (joon. 94). Siis võib jõumomendi telje z suhtes avaldada järgmisel kujul:

$$\mathbf{M}_z = [\mathbf{r}\mathbf{f}]_z = [(\mathbf{r}_z + \mathbf{R}), \mathbf{f}]_z = [\mathbf{r}_z, \mathbf{f}]_z + [\mathbf{R}\mathbf{f}]_z.$$

Kuid vektor $[\mathbf{r}_z, \mathbf{f}]$ on risti teljega z , järelikult on selle vektori teljesuunaline komponent null. Seepärast saame valemi

$$\mathbf{M}_z = [\mathbf{R}\mathbf{f}]_z. \quad (36.8)$$

Nüüd esitame jõuvektori \mathbf{f} kolme komponendi summana, millest \mathbf{f}_\parallel on paralleelne teljega z , \mathbf{f}_R kollineaarne vektoriga \mathbf{R} ning lõpuks \mathbf{f}_τ risti tasapinnaga, milles asuvad telg z ja vektor \mathbf{R} . Joonisel 94 on see komponent kujutatud ringikesena, mille sees on rist. Kui kujutada endale ringjoont raadiusega R ning tsentriga teljel z , siis jõu komponent \mathbf{f}_τ on suunatud mööda selle ringjoone puutujat. Asendame avaldises (36.8) vektori \mathbf{f} ülalloetletud komponentide summaga:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_z &= [\mathbf{R}\mathbf{f}]_z = [\mathbf{R}, (\mathbf{f}_\parallel + \mathbf{f}_R + \mathbf{f}_\tau)]_z = \\ &= [\mathbf{R}, \mathbf{f}_\parallel]_z + [\mathbf{R}, \mathbf{f}_R]_z + [\mathbf{R}, \mathbf{f}_\tau]_z. \end{aligned}$$

Vaatleme kõiki kolme liiget eraldi. Vektor $[\mathbf{R}, \mathbf{f}_\parallel]$ on risti teljega z , seepärast on selle vektori teljesuunaline komponent võrdne nulliga. Vektor $[\mathbf{R}, \mathbf{f}_R]$ on ise võrdne nulliga, sest teda moodustavad tegurid on kollineaarsed. Järelikult on esimesed kaks liiget võrdsed nulliga. Vektor $[\mathbf{R}, \mathbf{f}_\tau]$ on paralleelne teljega z (teda moodustavad tegurid on mõlemad risti selle teljega), mistõttu selle vektori teljesuunaline komponent on võrdne tema enesega: $[\mathbf{R}, \mathbf{f}_\tau]_z = [\mathbf{R}, \mathbf{f}_\tau]$. Nii saame valemi

$$\mathbf{M}_z = [\mathbf{R}, \mathbf{f}_\tau]. \quad (36.9)$$

Vektorid \mathbf{R} ja \mathbf{f}_τ on omavahel risti. Seega on vektori \mathbf{M}_z moodul

$$|\mathbf{M}_z| = Rf_\tau. \quad (36.10)$$

Suurust R nimetatakse jõu \mathbf{f}_τ õlaks telje z suhtes.

Avaldisest (36.9) saab järeldada, et moment \mathbf{M}_z iseloomustab jõu \mathbf{f} võimet pöörata keha, millele ta on rakendatud, ümber telje z . Tõepoolest, komponendid \mathbf{f}_\parallel ja \mathbf{f}_R ei saa kutsuda esile pöörlemist ümber telje z . Järelikult kutsub vaadeldava pöörde esile ainult komponent \mathbf{f}_τ ning selle komponendi mõju on seda suurem, mida suurem on tema õlg R .

Ka telje suhtes määratud momendi puhul kehtib seos (36.5), s.o. resultandi moment on võrdne liidetavate jõudude momentide summaga sama telje suhtes:

$$\mathbf{M}_z = \mathbf{M}_{z1} + \mathbf{M}_{z2} + \dots \quad (36.11)$$

Sisejõudude summaarne moment. Jõud, millega kaks ainepunkti teineteist mõjutavad, asuvad samal sirgel (joon. 95). Nende jõudude momendid suvalise punkti O suhtes on suuruse poolest võrdsed ning suuna poolest vastupidised. Seega tasakaalustuvad sisejõudude momendid paarikaupa ning nende summa on iga ainepunktide süsteemi, s.t. jäiga keha puhul alati võrdne nulliga. See väide kehtib kõikide sisejõudude summaarse momendi kohta nii suvalise punkti kui ka suvalise telje suhtes.

§ 37. AINEPUNKTI IMPULSIMOMENT. IMPULSIMOMENDI JÄÄVUSE SEADUS

Analoogiliselt jõumomendiga defineeritakse ainepunkti impulsimoment (liikumishulga moment). Impulsimoment punkti O suhtes on

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] = m[\mathbf{r}\mathbf{v}], \quad (37.1)$$

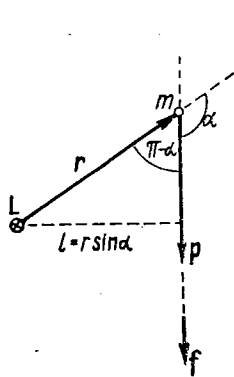
kus \mathbf{r} on punktist O vaadeldava ainepunkti asukohta tõmmatud raadiusvektor (joon. 96; vektorit \mathbf{f} läheb meil edaspidi tarvis), $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ on ainepunkti impulss (vrd. valemiga (36.1)).

Võtnud kasutusele impulsi õla $l = r \sin \alpha$, võime impulsimomendi vektori mooduli kirjutada kujul:

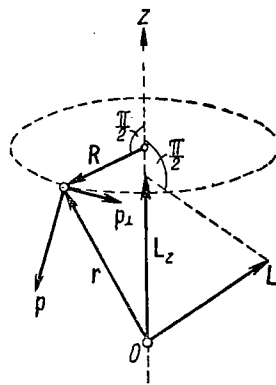
$$L = rp \sin \alpha = lp. \quad (37.2)$$

Impulsimomendiks telje z suhtes nimetatakse teljel asuva

¹ Vektori \mathbf{M}_z moodulit ei saa tähistada sümboliga M_z , sest viimane märgib vektori \mathbf{M} projektsiooni teljel z , mis võib olla nii positiivne kui negatiivne suurus. Vektori moodul aga on alati positiivne. Kehtib seos $|\mathbf{M}_z| = |M_z|$.



Joon. 96



Joon. 97

punkti O suhtes määratud impulsimomendi selle telje suunalist komponenti L_z (joon. 97):

$$L_z = [\mathbf{r}\mathbf{p}]_z. \quad (37.3)$$

Korranud arutluskäiku, mis tõi meid valemmini (36.9), leiame, et

$$L_z = [\mathbf{R}, \mathbf{p}_\tau] = m[\mathbf{R}, \mathbf{v}_\tau], \quad (37.4)$$

kus \mathbf{R} on teljega z risti olev raadiusvektori \mathbf{r} komponent, \mathbf{p}_τ aga telge z ja punkti m läbiva tasapinnaga risti olev vektori \mathbf{p} komponent.

Selgitame nüüd, millega on määratud impulsimomendi muutumine ajas. Selleks diferentseerime seost (37.1) aja järgi, kasutades korrutise diferentseerimise reeglit:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [\mathbf{r}\mathbf{p}] = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{p} \right] + \left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]. \quad (37.5)$$

Summa esimene liige on võrdne nulliga kui kahe samasuunalise vektori vektorkorrutis. Tõepoolest, vektor $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ on võrdne kiirusvektoriga \mathbf{v} ning ühtib järelikult suuna poolest vektoriga $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Vektor $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ on Newtoni teise seaduse alusel võrdne kehale mõjuva jõuga \mathbf{f} (vt. (22.3)). Järelikult saame avaldise (37.5) kirjutada ümber järgmiselt:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{r}\mathbf{f}] = \mathbf{M}, \quad (37.6)$$

kus \mathbf{M} on ainepunktile rakendatud jõudude moment sama punkti O suhtes, mille suhtes on määratud impulsimoment \mathbf{L} .

Seosest (37.6) järeldub, et kui ainepunktile mõjuvate jõudude summaarne moment mingi punkti O suhtes on võrdne nulliga, siis selle ainepunkti impulsimoment sama punkti O suhtes jääb konstantseks.

Võtnud valemis (37.6) esinevate vektorite telje z suunalised komponendid, saame avaldise:¹

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (37.7)$$

Valem (37.6) sarnaneb valemiga (22.3). Nende võrdlemine näitab, et impulsimomendi tuletis aja järgi on võrdne jõumomendiga, nii nagu impulsi tuletis aja järgi on võrdne ainepunktile rakendatud jõuga.

Vaatleme mõningaid näiteid.

Esimene näide. Liikugu ainepunkt m mööda punktiirsirget joonisel 96. Et liikumine on sirgjooneline, siis muutub ainepunkti impulss ainult mooduli poolest ning

$$\frac{dp}{dt} = f,$$

kus f on jõu moodul (antud juhul on \mathbf{f} ja \mathbf{p} samasuunalised (vt. joon. 96), seega $\frac{dp}{dt} > 0$).

Õlg l jääb muutumatuks. Järelikult,

$$\frac{d}{dt} L = \frac{d}{dt} (lp) = l \frac{dp}{dt} = lf = M,$$

¹ Vastavalt valemile (2.11)

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_{prz} = \frac{d}{dt} L_z,$$

kus $\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_{prz}$ on vektori $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$ projektsioon teljel z , L_z aga on vektori \mathbf{L} projektsioon teljel z . Korrutame mõlemaid võrrandi pooli z -telje ühikvektoriga \mathbf{e}_z ning arvestades, et \mathbf{e}_z ei sõltu ajast, viime selle võrrandi paremal poolel tuletise märgi alla. Tulemusena saame:

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_{prz} \mathbf{e}_z = \frac{d}{dt} (L_z \mathbf{e}_z).$$

Kuid \mathbf{e}_z korrutis vektori projektsiooniga teljel z annab selle vektori z -telje sihilise komponendi (vt. märkust lk. 99). Järelikult

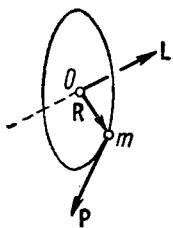
$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_z = \frac{d}{dt} L_z,$$

kus $\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_z$ on vektori $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$ z -telje sihiline komponent.

mis on kooskõlas ka valemiga (37.6) (antud juhul muutub L , s. t. suureneb, ainult moodulilt, seepärast $\left| \frac{dL}{dt} \right| = \frac{dL}{dt}$).

Teine näide. Ainepunkt massiga m liigub mööda ringjoont raadiusega R (joon. 98). Ringjoone keskpunkti O suhtes määratud impulsimomendi moodul

$$L = mvR. \quad (37.8)$$



Joon. 98

Vektor L on risti ringjoone tasapinnaga, kusjuures punkti liikumise suund ja vektor L on seotud kruvireegli järgi.

Et õlg R jääb konstantseks, saab impulss muutuda ainult kiiruse mooduli muutumise arvel. Kui ainepunkt liigub mööda ringjoont ühtlaselt, jääb impulsimoment konstantseks nii suuruse kui ka suuna poolest. On lihtne mõista, et sel juhul on ainepunktile mõjuva jõu moment võrdne nulliga.

Kolmas näide. Vaatleme ainepunkti liikumist tsentraalses jõuväljas (vt. § 26). Vastavalt seosele (37.6) peab ainepunkti impulsimoment jõudude tsentri suhtes jääma muutumatuks nii suuruse kui suuna poolest (tsentraalse jõu moment tsentri suhtes on null). Jõudude tsentrist punkti m tõmmatud raadiusvektor r ning vektor L on omavahel risti, seepärast jääb vektor r alati samasse, vektoriga L risti olevasse tasapinda. Järelikult liigub ainepunkt tsentraalses jõuväljas mööda kõverat, mis asub jõudude tsentrit läbivas tasapinnas.

Olenevalt tsentraalsete jõudude märgist (s. o. sellest, kas nad on tõmbe- või tõukejõud), samuti ka algtingimustest, omab trajektor kas hüperbooli, parabooli või ellipsi, erijuhul ringjoone kuju. Näiteks Maa liigub mööda elliptilist orbiiti, mille ühes fookuses asub Päike.

Impulsimomendi jäävuse seadus. Vaatleme N materiaalsest punktist koosnevat süsteemi. Analooiliselt sellega, kuidas tehti §-s 23, jaotame ainepunktidele mõjuvad jõud sise- ja välisjõudeks. i -ndale punktile mõjuvate sisejõudude summaarse momendi tähistame sümboliga M'_i , samale punktile mõjuvate välisjõudude summaarne moment olgu M_i . Siis võtab võrrand (37.6) i -nda ainepunkti kohta kirjutatuna kuju

$$\frac{d}{dt} L_i = M'_i + M_i \quad (i=1, 2, \dots, N).$$

See avaldis esitab N võrrandist koosnevat süsteemi, kus üksikud võrrandid erinevad indeksi i väärtuse poolest. Liitnud need võrrandid, saame:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N M'_i + \sum_{i=1}^N M_i. \quad (37.9)$$

Suurust

$$L = \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N [r_i, p_i] \quad (37.10)$$

nimetatakse ainepunktide süsteemi impulsimomentiks.

Sisejõudude momentide summa (valemi (37.9) paremal poolel esinevatest summadest esimene), nagu tõestatud § 36 lõpus, on võrdne nulliga. Tähistanud välisjõudude summaarse momendi sümboliga M , võime järelikult kirjutada

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N M_i = M \quad (37.11)$$

(sümbolite L ja M sisu erineb siin sellest, mis oli samadel sümbolitel valemis (37.6)).

Ainepunktide isoleeritud süsteemi korral $M=0$, mistõttu summaarne impulsimoment L ei sõltu ajast. Seega oleme jõudnud impulsimomendi jäävuse seaduseni: *ainepunktide isoleeritud süsteemi impulsimoment on jääv suurus.*

Mainime veel, et impulsimoment jääb muutumatuks ka niisuguse süsteemi korral, kus välisjõud esinevad, kuid nende jõudude summaarne moment on võrdne nulliga.

Võtnud võrrandi (37.11) vasakul poolel seisvate vektorite z -telje sihilised komponendid, saame seose

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{i=1}^N M_{zi} = M_z. \quad (37.12)$$

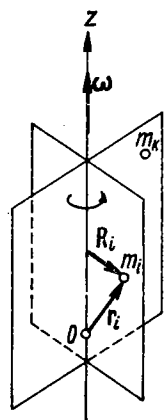
Võib juhtuda, et välisjõudude summaarne moment punkti O suhtes erineb nullist ($M \neq 0$), kuid vektori M mingis suunas z võetud komponent M_z on null. Niisugusel juhul jääb vastavalt seosele (37.12) konstantseks süsteemi impulsimomendi z -telje suunaline komponent L_z .

§ 38. PÖÖRDLIIKUMISE DÜNAAMIKA PÕHIVÖRRAND

Vaatleme ainepunktide süsteemi, milles iga punkt liigub mööda ühte tasapinda, kõik need tasapinnad läbivad ühist telge z ning pöörlevad ümber selle telje ühesuguse nurkkiirusega (joon. 99).

Vastavalt valemile (11.5) võib i -nda punkti kiiruse tangentiaalkomponendi esitada kujul

$$v_{ti} = [\omega, R_i],$$



Joon. 99

kus R_i on raadiusvektori r_i teljega z risti olev komponent (selle moodul R_i määrab punkti kauguse teljest z). Asendanud valemis (37.4) $v_{\tau i}$ tema avaldisega, saame punkti impulsimomendi avaldise telje z suhtes:

$$L_{zi} = m_i [R_i, [\omega, R_i]] = m_i R_i^2 \omega$$

(me kasutasime seost (11.3); vektorid R_i ja ω on vastastikku risti).

Summeerinud selle avaldise üle kogu süsteemi ning toonud summa märgi alt välja ühise teguri ω , saame järgmise avaldise, mis väljendab süsteemi impulsimomenti telje z suhtes:

$$L_z = \omega \sum_{i=1}^N m_i R_i^2. \quad (38.1)$$

Füüsikalist suurust

$$I_z = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2, \quad (38.2)$$

s.o. summat, milles iga liidetav on ainepunkti massi korrutis tema kauguse ruuduga pöörlemisteljest z , nimetatakse ainepunktide süsteemi inertsimomendiks telje z suhtes (üksikkorrutis $m_i R_i^2$ on i -nda ainepunkti inertsimoment telje z suhtes).

Valemit (38.2) arvestades võtab seos (38.1) kuju:

$$L_z = I_z \omega. \quad (38.3)$$

Asendanud seoses (37.12) L_z selle avaldisega, saame võrrandi:

$$\frac{d}{dt} (I_z \omega) = M_z, \quad (38.4)$$

mis on pöördliikumise dünaamika põhivõrrand. Kuju poolest sarnaneb see Newtoni teise seaduse võrrandiga:

$$\frac{d}{dt} (mv) = f.$$

§ 35 märkisime juba, et absoluutselt jäika keha võib vaadelda kui ainepunktide süsteemi, milles punktidevahelised kaugused on muutumatud. Niisuguse süsteemi puhul on tema inertsimoment I_z fikseeritud telje z suhtes muutumatu suurus. Järelikult saab võrrandist (38.4) jäiga keha korral võrrand

$$I_z \beta = M_z, \quad (38.5)$$

kus $\beta = \dot{\omega}$ on keha nurkkiirendus, M_z — kehale mõjuvate välisjõudude summaarne moment.

Võrrand (38.5) on kuju poolest sarnane võrrandiga

$$m\dot{w} = f.$$

Võrreldes pöördliikumise dünaamika võrrandeid kulgliikumise dünaamika võrranditega, on kerge märgata, et pöördliikumisel mängib jõu osa jõumoment, massi osa — inertsimoment jne. (tabel 2).

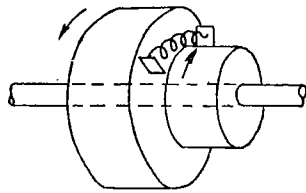
Tabel 2

Kulgliikumine	Pöördliikumine
$m\dot{w} = f$	$I_z \beta = M_z$
$p = mw$	$L_z = I_z \omega$
$\frac{dp}{dt} = f$	$\frac{dL}{dt} = M$
f — jõud	M või M_z — jõumoment
m — mass	I_z — inertsimoment
v — joonkiirus	ω — nurkkiirus
w — joonkiirendus	β — nurkkiirendus
p — impulss	L — impulsimoment

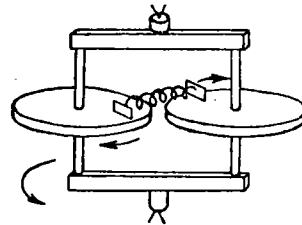
Jõumomendi ja inertsimomendi mõisted tõime sisse jäiga keha pöörlemist vaadeldes. Kuid tuleb silmas pidada, et need suurused eksisteerivad olenemata pöörlemisest. Nii näiteks omab iga jäik keha teatud inertsimomenti iga telje suhtes sõltumata sellest, kas ta pöörleb või mitte, samuti kui igal kehal on teatud mass, olenemata tema liikumise olukorrast. Ka jõumoment eksisteerib olenemata sellest, kas keha pöörleb või mitte telje ümber, mille suhtes jõumoment võetakse. Viimasel juhul ilmselt tasakaalustavad selle jõumomendi teiste kehale mõjuvate jõudude momendid.

Võrrandist (38.5) järeldub, et kui kehale mõjuvate välisjõudude summaarne moment on võrdne nulliga, siis pöörleb keha jääva nurkkiirusega. Kui keha inertsimoment võib muutuda selle keha osade vastastikuse asetuse muutudes, siis $M_z = 0$ korral jääb muutumatuks korrutis $I_z \omega$ (vt. (38.4)) ning inertsimomendi I_z muutus kutsub esile nurkkiiruse ω vastava muutuse. Sellega seletub nähtus, kus pöörleval pingil seisev inimene hakkab pöörlema aeglasemalt, kui ta käed kahele poole kõrvale välja sirutab, ning kiiremini, kui ta käed rippu laseb.

Vaatleme süsteemi, mis koosneb kahest ühist pöörlemistelge omavast kettast (joon. 100). Ketaste külge joodetud plaadikeste vahele asetame kokkusurutud vedru ning seome need plaadike-



Joon. 100



Joon. 101

sed niidiga kokku. Kui niit läbi põletada, hakkavad mõlemad kettad laialipaiskuva vedru mõjul pöörlema vastupidistes suundades. Impulsimomendid, mis kumbki ketas saab, on suuruse poolest võrdsed ning suuna poolest vastupidised:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2,$$

nii et süsteemi summaarne impulsimoment jääb endiselt võrdseks nulliga.

Olukord on samasugune ka joonisel 101 kujutatud süsteemi korral, kus kaks eri teljega ketast on kinnitatud raami külge, mis saab vabalt pöörlema süsteemi sümmeetriatelje ümber. Kui põletada läbi ketaste külge joodetud plaadikesi ühendav niit, hakkab plaadikeste vahele kokkusurutud vedru paisuma ning paneb mõlemad kettad pöörlema samas suunas. Samal ajal hakkab raam pöörlema vastassuunas, nii et süsteemi kui terviku impulsimoment jääb võrdseks nulliga.

Mõlemas vaadeldud näites tekkis süsteemi eri osade pöörlemine sisejõudude mõjul. Järelikult võivad süsteemi kuuluvate kehade vahel mõjuvad sisejõud muuta süsteemi osade impulsimomente. Need muutused on aga alati sellised, et süsteemi kui terviku summaarne impulsimoment jääb muutumatuks. Süsteemi koguimpulsimomendi muutuse saavad esile kutsuda vaid välisjõud.

§ 39. INERTSIMOMENT

Eelmises paragrahvis defineerisime inertsimomendi kui summa, milles liidetavateks on elementaarmasside korrutised nende kauguse ruuduga teljest (vt. (38.2)). Definitsioonist järeldub, et inertsimoment on aditiivne suurus, tähendab, keha inertsimoment on võrdne tema osade inertsimomentide summaga.

Massi jaotust keha piires saab iseloomustada suurusega, mida nimetatakse tiheduseks. Kui keha on homogeenne, s.o. tema omadused kõikides punktides ühesugused, siis nimetatakse tiheduseks suurust

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (39.1)$$

kus m on keha mass, V — tema ruumala. Seega on homogeenne keha tihedus võrdne keha ruumalaühiku massiga.

Kui mass on kehas jaotunud ebaühtlaselt, annab valem (39.1) keha keskmise tiheduse. Tiheduse antud punktis määrab sel juhul valem:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (39.2)$$

Selles valemis on Δm ruumalas ΔV sisalduva aine mass. Üleminekul piirile tõmbub ΔV punktiks, milles tihedust määratakse.

Piirile üleminekut, s.t. seost (39.2) ei tohi mõista nii, et ΔV väheneb sõna otseses mõttes punktini. Niisuguse arusaamise korral saaksime kahe punkti jaoks, millest üks langeb aatomituumale, teine aga tuumadevahelisse ruumi, väga erinevad tulemused (esimese punkti puhul tohutult suure väärtuse, teise puhul nulli). Seepärast peab ruumala ΔV vähenema füüsikaliselt lõpmata väikese väärtuseni, mille all mõistetakse niisugust ruumala, mis ühest küljest oleks küllalt väike selleks, et suurele aatomite kogumile iseloomulikke makroskoopilisi omadusi võiks kogumi ulatuses pidada ühesugusteks, ning teisest küljest küllalt suur selleks, et ei saaks avalduda aine diskreetsus (mitte pidevus).

Vastavalt valemile (39.2) on elementaarmass Δm_i võrdne keha antud punktis võetud tiheduse ρ_i ja vastava elementaarruumala ΔV_i korrutisega:

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i.$$

Järelikult võib inertsimomendi avaldada kujul

$$I = \sum \rho_i r_i^2 \Delta V_i \quad (39.3)$$

(valemis (38.2) on R_i asemel r_i).

Kui keha tihedus on ühesugune, võib tuua selle summamärgi ette:

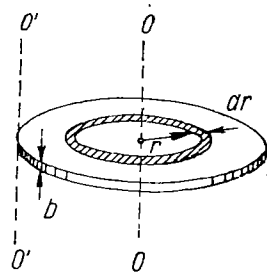
$$I = \rho \sum r_i^2 \Delta V_i. \quad (39.4)$$

Seosed (39.3) ja (39.4) on ligikaudsed ning seda täpsemad, mida väiksemad on elementaarruumalad ΔV_i ja nendele vastavad elementaarmassid Δm_i . Seega taandub inertsimomendi määramise ülesanne integreerimisele:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV. \quad (39.5)$$

Integraalid (39.5) võetakse üle keha koguruumala. Suurused ρ ja r on nendes integraalides punkti funktsioonid, s.o. näiteks ristkoordinaatide x , y ja z funktsioonid.

Määrame näiteks homogeenne ketta inertsimomendi telje suh-



Joon. 102

tes, mis läbib ketta tsentrit ning on risti tema tasapinnaga (joon. 102). Jaotame ketta rõngaskihtideks paksusega dr . Ühe kihi kõik punktid on teljest samal kaugusel r . Niisuguse kihi ruumala on

$$dV = b2\pi r dr,$$

kus b on ketta paksus.

Et ketas on homogeenne, siis on tema tihedus kõikjal ühesugune ning valemis (39.5) võib ρ tuua integraalimärgi ette:

$$I = \rho \int r^2 dV = \rho \int_0^R r^2 b 2\pi r dr,$$

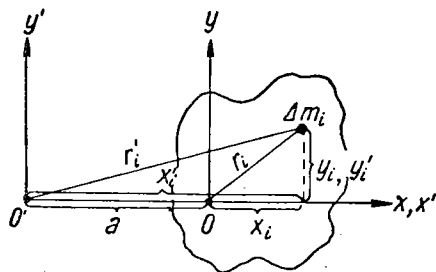
kus R on ketta raadius. Toome integraalimärgi ette konstantse teguri $2\pi b$:

$$I = 2\pi b \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi b \rho \frac{R^4}{4}.$$

Lõpuks, asendanud tiheduse ρ ja ketta ruumala $b\pi R^2$ korrutise ketta massiga m , saame

$$I = \frac{mR^2}{2}. \quad (39.6)$$

Antud näites muutis inertsimomendi leidmise ülesande oluliselt lihtsamaks asjaolu, et keha oli homogeenne ja sümmeetriline ning inertsimoment määrati sümmeetriatelje suhtes. Kui me tahaksime määrata ketta inertsimomenti näiteks telje $O'O'$ suhtes, mis on risti kettaga, kuid läbib tema serva (vt. joon. 102), muutuksid arvutused märksa keerulisemaks. Niisugusel juhul lihtsustub inertsimomendi arvutamine, kui võtta kasutusele Steineri teoreem. See kõlab järgmiselt: inertsimoment I mingi suvaliselt valitud telje suhtes võrdub summaga, milles üheks liidetavaks on inertsimoment I_0 telje suhtes, mis on paralleelne antud teljega ning läbib keha inertsikeset, ja teiseks lii-



Joon. 103

detavaks keha massi m korrutis telgedevahelise kauguse a ruuduga:

$$I = I_0 + ma^2. \quad (39.7)$$

Steineri teoreemi järgi saame ketta inertsimomendi telje $O'O'$ suhtes, kui liidame varem määratud inertsimomendile (39.6) korrutise mR^2 (telgede OO ja $O'O'$ vaheline kaugus võrdub ketta raadiusega R):

$$I = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Seega taandab Steineri teoreem inertsimomendi arvutamise suvalise telje suhtes inertsimomendi arvutamisele keha inertsikeset läbiiva telje suhtes.

Steineri teoreemi tõestamiseks vaatleme suvalise kujuga keha (joon. 103). Võtame kaks paralleelset telge OO ja $O'O'$, millest üks (telg OO) läbib keha inertsikeset. Seome nende telgedega koordinaatteljed xyz ja $x'y'z'$ ning valime need nii, et telg z ühtiks teljega OO ja telg z' teljega $O'O'$ (joonisel 103 on need teljed risti joonise tasapinnaga). Teljed x ja x' valime nii, et nad ühtiksid ning läbiksid keha inertsikeset. Siis on elementaar-massi Δm_i koordinaatide vahel järgmised seosed:

$$x'_i = a + x_i; \quad y'_i = y_i,$$

kus a on telgedevaheline kaugus.

Elementaarmassi Δm_i kauguse ruut teljest OO

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2, \quad (39.8)$$

tema kauguse ruut teljest $O'O'$

$$r_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2 = (x_i + a)^2 + y_i^2. \quad (39.9)$$

Võttes arvesse seose (39.8), saame keha inertsimomendi telje OO suhtes määrata avaldisega

$$I_0 = \sum r_i^2 \Delta m_i = \sum (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i \quad (39.10)$$

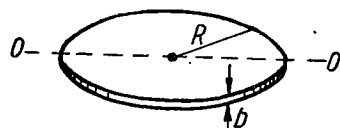
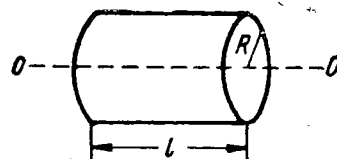
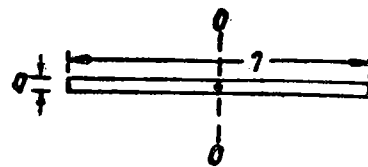
ning inertsimomendi telje $O'O'$ suhtes, arvestades seost (39.9), avaldisega

$$I = \sum r_i'^2 \Delta m_i = \sum [(a + x_i)^2 + y_i^2] \Delta m_i. \quad (39.11)$$

Tõstnud ümarsulgudes oleva avaldise ruutu ning rühmitanud vastaval viisil, võime avaldise (39.11) esitada järgmisel kujul:

$$I = \sum (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i + a^2 \sum \Delta m_i + 2a \sum x_i \Delta m_i. \quad (39.12)$$

Avaldise (39.12) esimene summa on identne avaldisega



↘ Joon. 104
Joon. 105 ↑
← Joon. 106

(39.10), see tähendab, võrdne I_0 , teine summa annab ma^2 , kolmas aga, nagu selgub, on võrdne nulliga. Tõepoolest, et z -telg läbib keha inertsikeset, on inertsikeskme koordinaat x_c võrdne nulliga.

Samal ajal on definitsiooni kohaselt $x_c = -\frac{1}{m} \sum x_i \Delta m_i$, kust järeldubki, et $\sum x_i \Delta m_i$ on võrdne nulliga.

Seega võtab avaldis (39.12) kuju

$$I = I_0 + ma^2,$$

mida oligi vaja tõestada (vt. 39.7)).

Lõpuks anname inertsimomentide avaldised mõningate kehade jaoks (oletatakse, et kehad on homogeenised, mass on m).

1. Keha kujutab endast pikka peent varrast, millel on suvalise kujuga ristlõige. Ristlõike maksimaalne joonmõõt b on palju kordi väiksem varda pikkusest l ($b \ll l$). Inertsimoment vardaga risti oleva ning selle keskpunkti läbiva telje suhtes (joon. 104)

$$I = \frac{1}{12} ml^2.$$

2. Kettal või silindril, mille puhul suhe R/l on täiesti suvalise väärtusega (joon. 105), on inertsimoment geomeetrilise teljega ühtiva telje suhtes

$$I = \frac{1}{2} mR^2.$$

3. Kehaks on õhukene kettas. Ketta paksus b on palju kordi väiksem ketta raadiusest R ($b \ll R$). Inertsimoment ketta diametriga ühtiva telje suhtes (joon. 106)

$$I = \frac{1}{4} mR^2.$$

4. Kera inertsimoment tema tsentrit läbiva telje suhtes

$$I = \frac{2}{5} mR^2.$$

§ 40. JÄIGA KEHA KINEETILINE ENERGIA

Keha pöörlemine liikumatu telje ümber. Pöörleku keha ümber liikumatu telje, mille nimetame teljeks z . Elementaarmassi Δm_i joonkiiruse võib esitada kujul

$$v_i = R_i \omega,$$

kus R_i on Δm_i kaugus teljest z . Järelikult on i -nda elementaar-massi kineetiline energia

$$\Delta T_i = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \Delta m_i R_i^2 \omega^2.$$

Keha kineetiline energia on tema osade kineetiliste energiatega summa:

$$T = \sum \Delta T_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum \Delta m_i R_i^2.$$

Seose paremal pool esinev summa on keha inertsimoment I_z pöörlemistelje suhtes. Seega on liikumatu telje ümber pöörleva keha kineetiline energia

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2}. \quad (40.1)$$

Saadud avaldis on sarnane kineetilise energia avaldisega kulgliikumise korral

$T = \frac{mv^2}{2}$. Pöördliikumisel on massi osas inertsimoment, joonkiiruse osas aga nurkkiirus.

Välisjõudude töö jäiga keha pöörlemisel. Määrame töö, mille teevad välisjõud jäiga keha pöörlemisel liikumatu telje ümber. Tähistame ainepunktile Δm_i rakendatud jõu \mathbf{f}_i . Ajavahemikus dt läbib i -s ainepunkt tee

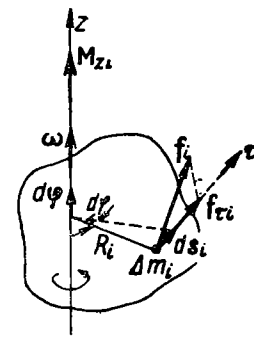
$$ds_i = R_i d\varphi,$$

kus $d\varphi$ on nurk, mille võrra keha on pöördunud ajavahemikus dt .

Jõu \mathbf{f}_i töö sellel teel määrab jõu projektsioon liikumissuunal, mille tähistame sümbooliga $f_{\tau i}$ (τ on i -nda ainepunkti trajektoori — ringjoone puutuja ühikvektor; selle vektori suund ühtib liikumise suunaga antud hetkel). Seega

$$dA_i = f_{\tau i} ds_i = f_{\tau i} R_i d\varphi.$$

Kuid $f_{\tau i} R_i$ on võrdne jõu \mathbf{f}_i momendi mooduliga telje z suhtes, s. o. $|M_{zi}|$ võetud plussmärgiga, kui $f_{\tau i}$ on positiivne, ning miinus-



Joon. 107

märgiga, kui f_{zi} on negatiivne (vt. valemit (36.10)); selles valemis f_z pole mitte jõu f_z projektsioon, vaid selle moodul). Järelikult,

$$dA_i = \pm |M_{zi}| d\varphi. \quad (40.2)$$

Elementaarset pöördnurka võib käsitada kui aksiaalvektorit

$$d\varphi = \omega dt.$$

On lihtne mõista, et töö dA_i on positiivne, kui vektor M_{zi} on samasuunaline vektoriga $d\varphi$, ning negatiivne, kui need vektorid on vastassuunalised. Seepärast võib valemile (40.2) anda kuju

$$dA_i = M_{zi} d\varphi.$$

Kõikide kehale rakendatud jõudude töö on võrdne üksikute jõudude tööde summaga:

$$dA = \sum dA_i = \sum M_{zi} d\varphi = (\sum M_{zi}) d\varphi.$$

Sulgudes olev summa on kõikide kehale rakendatud välisjõudude summaarne moment telje z suhtes M_z . Järelikult,

$$dA = M_z d\varphi. \quad (40.3)$$

See avaldis on analoogiline töö avaldisega kulgliikumisel: $dA = f ds$. Võrdlemisel selgub, et pöörlemise korral mängib jõu osa jõumoment, joonnihe $ds = v dt$ osa aga nurknihe $d\varphi = \omega dt$.

Praktiliselt kasutatakse töö arvutamiseks avaldist

$$dA = M_\omega d\varphi = M_\omega \omega dt, \quad (40.4)$$

kus M_ω all mõistetakse kehale rakendatud välisjõudude summaarse momendi projektsiooni vektori ω suunal. Lõpliku ajavahe- miku kestel sooritatud töö leitakse avaldise (40.4) integreerimise teel:

$$A = \int dA = \int_0^\varphi M_\omega d\varphi = \int_0^t M_\omega \omega dt. \quad (40.5)$$

Kui jõudude summaarse momendi projektsioon ω suunal ei muutu, võib selle integraali märgi ette tuua:

¹ Analoogiline arutluskäik ainepunktidele rakendatud sisejõudude f'_i kohta annaks valemi

$$dA = M'_z d\varphi,$$

kus M'_z on kõikide sisejõudude summaarne moment. See moment, nagu teame, võrdub nulliga (vt. § 36 viimast lõiku). Järelikult on sisejõudude töö keha pöörlemisel võrdne nulliga.

$$A = M_\omega \int_0^\varphi d\varphi = M_\omega \varphi \quad (40.6)$$

(φ on nurk, mille võrra keha on pöördunud aja t kestel).

Keha kineetiline energia tasapinnalisel liikumisel. Keha tasapinnalist liikumist, nagu nägime § 34, võib vaadelda kui kiirusega v_0 toimuva kulgliikumise ja vastava telje ümber asetleidva pöörlemise superpositsiooni. Seome kehaga koordinaadistiku K' , mille telg z' on suunatud mööda nurkkiiruse vektori ω . Vastavalt valemile (33.13) võib keha i -nda ainepunkti kiiruse liikumatus koordinaadistikus K esitada kujul

$$v_i = v_0 + [\omega, r'_i],$$

kus v_0 on süsteemi K' alguspunkti O' kiirus, r'_i — raadiusvektor, mis määrab ainepunkti asukoha punkti O' suhtes.

i -nda ainepunkti kineetiline energia¹

$$\Delta T_i = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \Delta m_i \{v_0 + [\omega, r'_i]\}^2.$$

Tõstnud sulgudes oleva avaldise ruutu, saame

$$\Delta T_i = \frac{1}{2} \Delta m_i \{v_0^2 + 2v_0[\omega, r'_i] + [\omega, r'_i]^2\}. \quad (40.7)$$

ω ja r'_i vektorkorrutise võib teadu järgi asendada ω ja R_i vektorkorrutisega, kus R_i on raadiusvektori r'_i z' -teljega risti olev komponent (vt. valemit (11.4) ja sellele järgnevat teksti). Selle vektorkorrutise moodul on ωR_i (ω ja R_i on vastastikku risti). Järelikult, $[\omega, r'_i]^2 = \omega^2 R_i^2$.

Teeme niisuguse asenduse avaldises (40.7) ning summeerime ΔT_i üle kõikide ainepunktide. Tulemusena saame keha kineetilise energia

$$T = \frac{1}{2} \sum \Delta m_i v_0^2 + \sum v_0[\omega, \sum \Delta m_i r'_i] + \frac{1}{2} \sum \omega^2 \Delta m_i R_i^2.$$

Toome kõikides liikmetes konstantsed tegurid summamärgi ette:

$$T = \frac{1}{2} v_0^2 \sum \Delta m_i + v_0[\omega, \sum \Delta m_i r'_i] + \frac{1}{2} \omega^2 \sum \Delta m_i R_i^2$$

(võrduse paremal poolel esineva teise liikme teisendamisel on kasutatud vektor- ja skalaarkorrutise distributiivsuseomadust).

¹ Tuletame, meelde, et vektori ruut on võrdne tema mooduli ruuduga: $v_i^2 = v_i^2$.

Ainepunktide masside summa $\sum \Delta m_i$ on keha mass m . Avaldis $\sum \Delta m_i \mathbf{r}'_i$ on võrdne keha massi ja selle inertsikeskme raadiusvektori \mathbf{r}'_c (süsteemis K') korrutisega (vt. valemit (23.1)). Lõpuks, $\sum \Delta m_i R_i^2$ annab keha inertsimomendi I_z pöörlemistelje z' suhtes. Seega võime kirjutada:

$$T = \frac{mv_0^2}{2} + v_0[\omega, m\mathbf{r}'_c] + \frac{I_z \omega^2}{2}. \quad (40.8)$$

See avaldis muutub lihtsamaks, kui võtta punktiks O' keha inertsikeske C , s. o. nihutada koordinaatsüsteemi K' alguspunkt punkti C . Sel juhul $\mathbf{r}'_c = 0$ ning teine liige langeb ära. Tähistanud inertsikeskme kiiruse sümboliga \mathbf{v}_c ning keha inertsimomendi punkti C läbiva pöörlemistelje suhtes I_c , saame keha kineetilise energia valemi:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}. \quad (40.9)$$

Seega koosneb tasapinnaliselt liikuva keha kineetiline energia kahest komponendist, millest üks on inertsikeskme kiirusega toimuva kulgliikumise energia ning teine inertsikeset läbiva telje ümber toimuva pöörlemise energia.

§ 41. JÄIGA KEHA DÜNAAMIKA SEADUSTE RAKENDUSI

Nagu eelnevatest paragrahvidest selgus, vastab jäiga keha liikumine kahele võrrandile (vt. (35.5) ja (38.5)):

$$m\mathbf{w}_c = \sum \mathbf{f}_i, \quad (41.1)$$

$$I\beta = \sum \mathbf{M}_i. \quad (41.2)$$

Järelikult on keha liikumine määratud kehale mõjuvate välisjõududega \mathbf{f}_i ja nende jõudude momentidega \mathbf{M}_i . Jõudude momendid võib võtta suvaliselt valitud liikumatu või kiirenduseta liikuva telje suhtes (sama telje suhtes võetakse ka inertsimoment I). Võtnud välisjõudude momendid kiirenevalt liikuva telje suhtes, saaksime sisuliselt võrrandi (41.2) mitteinertsiaalses taustsüsteemis. Sel juhul peab peale kehale rakendatud välisjõudude arvestama ka inertsijõudusid ja nende momente.

Kehale rakendatud jõudude \mathbf{f}_i rakenduspunkte võib nihutada mööda nende mõjusirgeid, seejuures ei muutu ei summa $\sum \mathbf{f}_i$ ega ka momendid \mathbf{M}_i (jõu nihutamisel mööda tema mõjusirget ei muutu selle jõu õlg ühegi suvaliselt valitud punkti suhtes). Niisuguse nihutamisega saab mitu jõudu asendada mõju seisukohalt ühe ekvivalentse jõuga. Nii näiteks saab kaks samas tasapinnas

asuvat jõudu \mathbf{f}_1 ja \mathbf{f}_2 (joon. 108) asendada ekvivalentse jõuga \mathbf{f} , mille rakenduspunkti võime valida suvaliselt tema mõjusirgel.

Kehale rakendatud paralleelsed jõud võib asendada nende resultantiga, mis on võrdne kõikide jõudude summaga ning rakendatud niisuguses keha punktis, et tema moment on võrdne üksikute jõudude momentide summaga.

Määrame raskusjõudude resultandi. Raskusjõud mõjuvad jäiga keha kõikidele elementidele, elementidele massiga Δm_i mõjuv jõud on seejuures võrdne $\Delta m_i \mathbf{g}$. Nende jõudude summa $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$. Raskusjõudude summaarne moment suvalise punkti O suhtes

$$\mathbf{M} = \sum [\mathbf{r}_i, (\Delta m_i \mathbf{g})],$$

kus \mathbf{r}_i on raadiusvektor, mis määrab Δm_i asukoha punkti O suhtes. Tõstnud skalaarse teguri Δm_i teisest tegurist esimesse ning viinud ühise teguri \mathbf{g} summamärgi alt välja, saame:

$$\mathbf{M} = [(\sum \Delta m_i \mathbf{r}_i), \mathbf{g}].$$

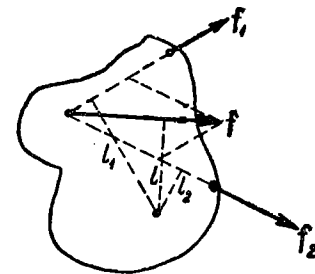
Kuid ümarsulgudes olev summa on võrdne keha massi m ja tema inertsikeskme raadiusvektori \mathbf{r}_c korrutisega. Seepärast

$$\mathbf{M} = [(m\mathbf{r}_c), \mathbf{g}] = [\mathbf{r}_c, (m\mathbf{g})] = [\mathbf{r}_c, \mathbf{P}]. \quad (41.3)$$

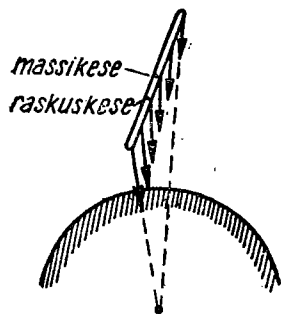
Nii ühtib raskusjõudude summaarne moment suvalise punkti suhtes punktis C rakendatud jõu $m\mathbf{g}$ momendiga.

Seega on raskusjõudude resultant $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ rakendatud keha inertsikeskmes.

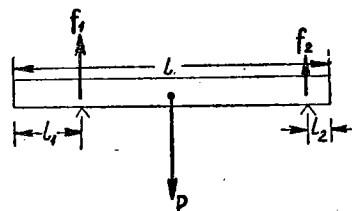
Valemist (41.3) järeldub, et raskusjõudude moment inertsikeskme suhtes on võrdne nulliga (sel juhul $\mathbf{r}_c = 0$). Punkti, mille suhtes raskusjõudude moment võrdub nulliga, nimetatakse keha raskuskeskmeks. Nagu juba märgitud § 23, ühtib raskuskese inertsikeskmeaga. Tõsi küll, väide kehtib vaid niisugusel juhul, kui gravitatsioonivälja võib pidada antud keha ulatuses homogeeneks, s. o. kui keha elementidele mõjuvad jõud on samasuunalised ning võrdelised massiga. See tingimus on täidetud keha puhul, mille mõõtmed on palju väiksemad maakera mõõtmetest. Kui keha mõõtmed on võrreldavad Maa mõõtmetega, siis raskuskese ja inertsikeske üldjuhul ei ühti. Selgitame seda lihtsa näite abil. Homogeenne pikk varras asub Maa lähedal (joon. 109). Joonisel näidatud asendi korral on varda elementidele mõjuvad gravitatsioonijõud ligikaudu paralleelsed. Kuid võrdsetele elementidele mõjuvate jõudude suurus muutub kaugusega Maast sea-



Joon. 108



Joon. 109



Joon. 110

duse $1/r^2$ järgi (r on elemendi kaugus Maa tsentrist). Ilmselt on raskuskese sel juhul nihkunud inertsikeskmest varda maapoolse otsa suunas.

Samad omadused nagu raskusjõududel on homogeense jõuvälja korral inertsijõududel, mis tuuakse sisse siis, kui vaadeldakse keha liikumist mitteinertsiaalses taustsüsteemis; viimane on ebaühtlases kulgliikumises inertsiaalsüsteemi suhtes. Tõepoolest, ainepunktidele Δm_i mõjuvad inertsijõud $-\Delta m_i \mathbf{w}_0$ on samasuunalised ning võrdelised massidega (\mathbf{w}_0 on kulgevast liikuva mitteinertsiaalse süsteemi kõikides punktides sama). Korrates arutluskäiku, mis tõi meid valemi (41.3) juurde, võib tõestada, et inertsijõudude resultant on võrdne $-m\mathbf{w}_0$ (m on keha mass) ning rakendatud keha inertsikeskmes.

Kulgliikumises oleva mitteinertsiaalse süsteemiga seotud ja keha inertsikeset läbiva telje suhtes, s. o. inertsiaalsüsteemi seisukohalt kulgliikumises oleva telje suhtes, on inertsimoment võrdne nulliga (inertsijõudude resultant, nagu nägime, on sel juhul rakendatud inertsikeskmes). Seepärast võib niisuguse telje suhtes kirjutada võrrandi (41.2), ilma et oleks vaja arvestada inertsijõudusid. Toonitame veel kord, et nii võib toimida ainult telje suhtes, mis läbib inertsikeset ega muuda oma suunda (ei pöördu) inertsiaalse taustsüsteemi suhtes. Tasapinnalisel liikumisel on niisuguseks teljeks liikumistasapinnaga risti olev inertsikeset läbiv telg.

Jäiga keha tasakaalutingimused. Keha jääb liikumatuks, kui puuduvad põhjused, mis kutsuksid esile selle keha kulg- või pöördliikumise. Vastavalt võrranditele (41.1) ja (41.2) on selleks vajalik ja piisav, et oleks täidetud kaks tingimust:

1) kõikide kehale rakendatud välisjõudude summa peab võrduma nulliga:

$$\sum \mathbf{f}_i = 0, \quad (41.4)$$

2) kõikide välisjõudude summaarne moment suvaliselt valitud

liikumatu telje suhtes peab võrduma nulliga:

$$\sum \mathbf{M}_i = 0. \quad (41.5)$$

Praktiliselt osutub küllaldaseks, kui tingimus (41.5) on täidetud kolme suvaliselt valitud liikumatu telje puhul, mis ei asu samas tasapinnas (näiteks koordinaattelgedes x , y ja z puhul). Siis on ta täidetud ka iga teise telje puhul.

Seosed (41.4) ja (41.5) ongi jäiga keha tasakaalutingimused.

Näiteid jäiga keha mehaanika seaduste rakendamiseks

Esimene näide. Homogeenne tala on asetatud kahele toele (joon. 110). Määrata tugede reaktsioonid \mathbf{f}_1 ja \mathbf{f}_2 .

Raskusjõudude resultant on \mathbf{P} ning see on rakendatud tala inertsikeskmes. Tala on liikumatu. Vastavalt tingimusele (41.4) peab jõudude \mathbf{P} , \mathbf{f}_1 ja \mathbf{f}_2 summa võrduma nulliga. Siit järeldub, et

$$\mathbf{P} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2,$$

kus \mathbf{P} , \mathbf{f}_1 ja \mathbf{f}_2 on komponentjõudude moodulid.

Nulliga peab võrduma ka kõikide talale mõjuvate jõudude summaarne moment suvalise telje suhtes (vt. (41.5)), muu hulgas peab võrduma nulliga moment vasakpoolse toetuspunkti suhtes, mis annab

$$P \left(\frac{l}{2} + l_1 \right) = f_2 (l - l_1 - l_2).$$

Nii saime kaks võrrandit kahe tundmatuga f_1 ja f_2 . Lahendades need võrrandid, leiame:

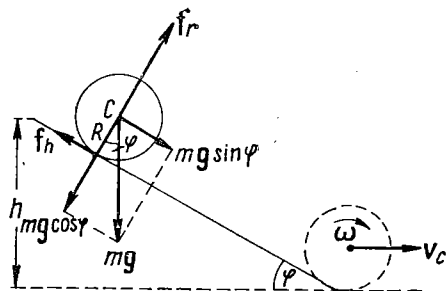
$$f_1 = \frac{P}{2} \frac{l - 2l_2}{l - (l_1 + l_2)};$$

$$f_2 = \frac{P}{2} \frac{l - 2l_1}{l - (l_1 + l_2)}.$$

Teine näide. Homogeenne silinder raadiusega R ja massiga m veereb libisemiseta mööda kaldpinda. Pinna kaldenurk on φ (joon. 111), kõrgus h ($h \gg R$). Silindri algkiirus on võrdne nulliga. Leida inertsikeskme joonkiirus ja silindri pöörlemise nurkkiirus hetkel, kui silinder läheb üle horisontaaltasapinnale.

Anname kaks lahenduse varianti.

Esimene lahendusviis. Silinder liigub kolme jõu mõjul. Need jõud on $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, hõõrdejõud \mathbf{f}_h ja kaldpinna reaktsioon \mathbf{f}_r . Reaktsioon \mathbf{f}_r on Newtoni kolmanda seaduse põhjal mooduli poolest võrdne jõu \mathbf{P} normaalkomponendiga, mille väärtus on $m\mathbf{g} \cos \varphi$.



Joon. 111

Hõõrdumine silindri ja kaldpinna vahel tekib nende kokkupuutepunktides. Et need silindri punktid on igal hetkel liikumatud (nad moodustavad pöörlemise hetktelje), siis on kõnealused hõõrdejõud seisuhõõrdejõud. § 19-st on teada, et seisuhõõrdejõud võib omada väärtusi alates nullist kuni maksimaalse suuruseni f_0 , mille määrab hõõrdeteguri ja kehade puutepinnaga risti oleva rõhumisjõu korrutis ($f_0 = kmg \cos \varphi$). Antud juhul omandab hõõrdejõud niisuguse väärtuse, et ei tekiks libisemist. Silindri veeremisel mööda tasapinda puudub libisemine tingimusel, kui kokkupuutepunktide joonkiirus on null. See tingimus aga on omakorda täidetud siis, kui inertsikeskme kiirus v_c on igal hetkel võrdne silindri pöörlemise nurkkiiruse ω ja silindri raadiuse R korrutisega:

$$v_c = \omega R. \quad (41.6)$$

Samuti on inertsikeskme kiirendus w_c võrdne nurkkiirenduse β ja raadiuse R korrutisega:

$$w_c = \beta R. \quad (41.7)$$

Kui nende tingimuste rahuldamiseks vajalik hõõrdejõud f_h ei ületa maksimaalset väärtust $f_0 = kmg \cos \varphi$, veereb silinder libisemiseta. Vastasel juhul on libisemiseta veeremine võimatu.

Kui libisemine puudub¹, võtab võrrand (41.1), projitseeritult liikumise suunale, kuju

$$m w_c = mg \sin \varphi - f_h. \quad (41.8)$$

Silindri telje suhtes kirjutatud võrrandis (41.2) on nullist erinev ainult hõõrdejõu moment. Kõikide teiste jõudude, kaasa arvatud inertsijõudude resultandi mõjusirged läbivad pöörlemistelge, mistõttu nende momendid selle telje suhtes on võrdsed nulliga. Seega saab võrrand (40.2) järgmise kuju:

¹ Libisemise korral on valemis (41.8) esinev f_h mitte seisuhõõrde-, vaid liugehõõrdejõud.

$$I\beta = Rf_h, \quad (41.9)$$

kus I on silindri inertsimoment tema telje suhtes (homogeense täissilindri puhul on see võrdne $\frac{1}{2} mR^2$).

Võrrandid (41.8) ja (41.9) sisaldavad kolme tundmatut: f_h , β ja w_c , kuid viimase kahe vahel valitseb veel seos (41.7), mis järeldub libisemise puudumisest. Lahendanud koos võrrandid (41.7) kuni (41.9), leiame, arvestades, et $I = \frac{1}{2} mR^2$:

$$f_h = \frac{1}{3} mg \sin \varphi, \quad (41.10)$$

$$w_c = \frac{2}{3} g \sin \varphi, \quad (41.11)$$

$$\beta = \frac{2}{3} \frac{g}{R} \sin \varphi. \quad (41.12)$$

Nüüd, kui teame seisuhõõrdejõudu (41.10), mis kindlustab silindri libisemiseta veeremise, võib püstitada tingimuse, mille puhul niisugune veeremine on võimatu. Libisemiseta veeremisel ei tohi jõud (41.10) ületada seisuhõõrdejõu maksimaalset väärtust f_0 , mis on võrdne $kmg \cos \varphi$:

$$\frac{1}{3} mg \sin \varphi \leq kmg \cos \varphi.$$

Siit järeldub, et

$$\tan \varphi \leq 3k.$$

Kui tasapinna kaldenurga φ tangens ületab silindri ja tasapinna vahelise seisuhõõrdeteguri kolmekordse väärtuse, ei saa veeremine toimuda ilma libisemiseta.

Nagu järeldub võrrandist (41.11), liigub silindri inertsikeske ühtlaselt kiirenevalt. Teades kiirendust w_c , saab leida silindri allaveeremise aja t_v , s. o. aja, mille kestel silinder läbib tee pikkusega $h/\sin \varphi$. Seda teed seob kiirenduse w_c ja ajaga t_v järgmine võrrand:

$$\frac{h}{\sin \varphi} = \frac{w_c t_v^2}{2},$$

kust, asendanud w_c valemist (41.11), saame

$$t_v = \frac{1}{\sin \varphi} \sqrt{\frac{3h}{g}}.$$

See aeg, samuti kui w_c , ei sõltu silindri raadiusest ega massist,¹ ta on määratud vaid tasapinna kaldenurgaga ja selle servade kõrguste vahel h .

Silindri inertsikeskme kiirus hetkel, mil ta läheb üle horisontaalsele tee, on

$$v_c = w_c t_v = \sqrt{\frac{4}{3} gh},$$

silindri nurkkiirus aga

$$\omega = \beta t_v = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3} gh}.$$

Märgime, et hõõrdejõud (41.10) silindri veeremisel tööd ei tee, sest need silindri punktid, kus see jõud on rakendatud, on igal ajahetkel liikumatud.

Horisontaalpinna korral ($\varphi=0$) järeldeb valemist (41.11) ja (41.12), et silinder, millele on eelnevalt antud mingi kulgliikumise ning libisemist välistav pöörlemise kiirus, hakkab liikuma ilma kiirenduseta. Tegelikult on see liikumine aeglustuv. Aeglustumine on põhjustatud veerehõõrdejõust, mille suund on selline, et tema moment vähendab nurkkiirust ω , jõud ise aga kutsub esile inertsikeskme liikumise aeglustumise (jällegi niisuguse, et ei esineks libisemist). Veerehõõrdejõu töö on negatiivne.

Lahendades kaldpinna mööda alla veereva silindri ülesannet, jätame veerehõõrdumise arvestamata.

Teine lahendusviis. Kuna hõõrdejõud tööd ei tee (veerehõõrdumise jätame arvestamata), jääb silindri koguenergia muutumatuks. Alghetkel on kineetiline energia null, potentsiaalne mgh . Veeremise lõpus saab potentsiaalne energia nulliks, see-eest aga tekib kineetiline energia (vt. (40.9))

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}.$$

Et libisemist ei esine, siis v_c ja ω seob võrrand $v_c = \omega R$. Teinud kineetilise energia valemis asendused $\omega = \frac{v_c}{R}$ ja $I_c = \frac{1}{2} mR^2$, saame:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mv_c^2}{4} = \frac{3}{4} mv_c^2.$$

Koguenergia peab veeremise alguses ja lõpus olema ühesugune:

¹ See kehtib vaid homogeenise täissilindri korral.

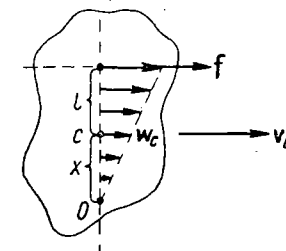
$$\frac{3}{4} mv_c^2 = mgh,$$

kust

$$v_c = \sqrt{\frac{4}{3} gh},$$

nurkkiirus aga

$$\omega = \frac{v_c}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3} gh}.$$



Joon. 112

Kolmas näide. Kehale massiga m mõjub väga lühikese ajavahemiku Δt kestel konstantne jõud f . Kogu ülejäänud aja jooksul mingid teised kehad talle mõju ei avalda. Enne impulsi $f\Delta t$ andmist vaadeldavale kehale oli ta paigal. Kuidas hakkab liikuma keha pärast jõu f mõju lakkamist?

Võrrand (41.1) võtab antud juhul kuju

$$mw_c = f,$$

kust

$$w_c = \frac{1}{m} f. \quad (41.13)$$

Järelikult, senikaua kui jõud mõjub, liigub keha inertsikeske ühtlaselt kiirenevalt jõu mõjumise suunas.

Tähistame jõu f öla inertsikeskme suhtes tähega l (joon. 112). Tõmbame läbi inertsikeskme C telje OO , mis oleks risti jõu mõju-sirget ja keha inertsikeset läbiva tasapinnaga. Võrrand (41.2), kirjutatud selle telje suhtes, võtab kuju

$$I_c \beta = M,$$

kus I_c on keha inertsimoment telje OO suhtes, $M = fl$ aga jõu f moment sama telje suhtes. Lahendatud selle võrrandi β suhtes, leiame:

$$\beta = \frac{M}{I_c} = \frac{fl}{I_c}. \quad (41.14)$$

Seega, kogu aja Δt kestel, mil kehale mõjub jõud, liigub tema inertsikeske sirgjooneliselt jääva kiirendusega (41.13) ning samal ajal pöörleb keha ise inertsikeset läbiva telje ümber nurkkiirendusega (41.14). Ajavahemiku Δt lõpus saavutab inertsikeske kiiruse

$$v_c = w_c \Delta t = \frac{f \Delta t}{m},$$

nurkkiirus aga väärtuse

$$\omega = \beta \Delta t = \frac{M \Delta t}{I_c} = \frac{fl \Delta t}{I_c}.$$

Leitud kiiruste väärtused v_c ja ω määravad keha liikumise pärast seda, kui jõu mõju lakkab.

Märgime, et tulemus kehtib vaid juhul, kui keha pöörduv jõu mõjumise kestel väikese nurga võrra, nii et jõu õla l võib ajavahemiku Δt jooksul lugeda küllaldase täpsusega konstantseks.

On lihtne veenduda, et inertsikeskmest kaugusel x asuva punkti O' kiirus on null (joon. 112), kusjuures

$$\omega x = v_c, \text{ s. o. } \beta x = \omega_c. \quad (41.15)$$

Järelikult on punkti O' läbiv telg pöörlemise hetkkelg. Asendanud tingimuses (41.15) ω_c ja β nende avaldistega, saame

$$x = \frac{I_c}{ml}.$$

Jõu mõju tulemusena omandab keha kineetilise energia

$$\begin{aligned} T &= \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{f \Delta t}{m} \right)^2 + \frac{I_c}{2} \left(\frac{f l \Delta t}{I_c} \right)^2 = \\ &= \frac{I_c + ml^2}{2mI_c} (f \Delta t)^2. \end{aligned}$$

Kineetilise energia T sõltuvus kaugusest l on seletatav sellega, et jõu rakenduspunkti tee ajavahemiku Δt jooksul kasvab l suurenedes, seoses sellega kasvab ka jõu töö.

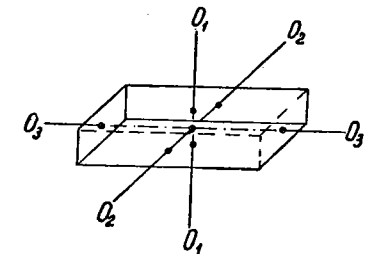
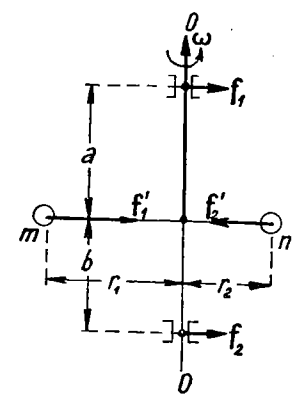
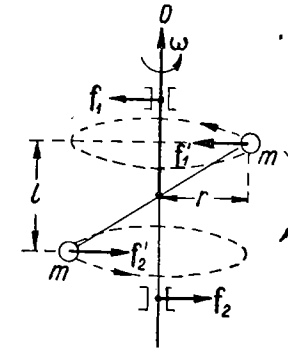
§ 42. VABAD TELJED. INERTSI PEATELJED

Kui panna mingi keha pöörlema suvalise telje ümber ning pärast seda lasta ta vabaks, siis pöörlemistelje asend ruumis üldiselt muutub: ta kas pöörduv või nihkub inertsiaalse taustsüsteemi suhtes. Selleks et hoida suvaliselt valitud telge muutumatus asendis, tuleb talle rakendada teatud jõudu.

Nii näiteks kui kehal on joonisel 113 näidatud kuju ning ta pöörleb telje OO ümber nurkkiirusega ω , on tarvis selle pöörlemistelje säilitamiseks rakendada talle niisuguseid jõude, mis kindlustaksid pöördemomendi $M = m\omega^2 r l$. Tõepoolest, selleks et kindlustada kehade massiga m liikumine mööda ringjooni raadiusega r , peab neile rakendama jõud f'_1 ja f'_2 , mille moodulid peavad olema võrdsed $m\omega^2 r$. Need jõud moodustavad jõupaari, mille moment $M = m\omega^2 r l$. Kui momenti ei tekitata, vaid asetatakse telg näiteks laagritesse, mis mõjutavad seda jõududega f_1 ja f_2 ,¹ siis hakkab pöörlemistelg pöörduma noolega näidatud suunas.

Kui kehi m ja n ($m=n$) ühendav varras on risti pöörlemisteljega OO ning kehad asuvad teljest erinevatel kaugustel r_1 ja r_2 (joon. 114), siis pöörlemistelje liikumise vältimiseks ruumis pea-

¹ Nende jõudude suunad muutuvad keha pöörlemisel ümber telje.



↑ Joon. 113

Joon. 114 ↗

Joon. 115 →

vad laagrid mõjutama telge samasuunaliste jõududega f_1 ja f_2 , mille moodulite summa on võrdne tsentripetaaljõudude f'_1 ja f'_2 moodulite vahega:

$$f_1 + f_2 = m\omega^2 (r_1 + r_2)$$

(kui lõigud a ja b ning jõud f_1 ja f_2 on ühesuursed; vastasel korral peab kehtima seos $f_1 a = f_2 b$).

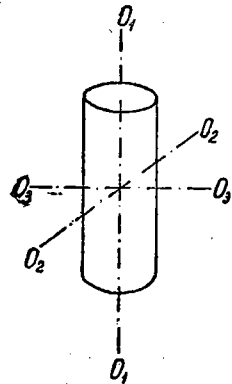
Pöörlemistelge, mille asend ruumis säilib, ilma et talle peaksid mõjuma mingid välisjõud, nimetatakse keha v a b a k s t e l j e k s. Joonisel 114 kujutatud keha puhul on telg OO vaba telg, juhul kui $r_1 = r_2$.

On võimalik tõestada, et igal kehal on kolm vastastikku risti asetsevat ning keha inertsikeset läbivat telge, mis võivad olla vabad teljed; neid nimetatakse inertsia peateelgedeks.

Homogeense risttahuka puhul (joon. 115) on peateelgedeks ilmselt teljed O_1O_1 , O_2O_2 ja O_3O_3 , mis läbivad vastastahkude tsentreid.

Telgsümmeetriaga kehal (näiteks homogeensel¹ silindril) on üheks inertsia peateeljeks sümmeetriatelg, kaks ülejäänud peateelge

¹ Piisab, kui keha tihedus igas lõikes sõltub ainult pöörlemistelje kaugusest.



Joon. 116

võivad moodustada kaks suvalist vastastikku ristuvat telge, mis on risti sümmeetriateljega ning läbivad inertsikeset (joon. 116). Nii on telgsümmeetriaga kehal fikseeritud ainult üks inertsipeatelge.

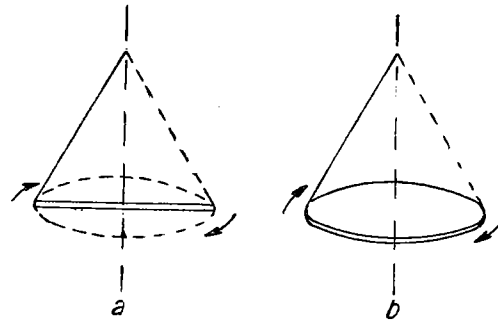
Tsentraalsümmeetriaga kehal, s.o. keral, mille tihedus sõltub ainult kera tsentri kaugusest, on peatelgedeks mistahes kolm vastastikku ristuvat telge, mis läbivad inertsikeset. Järelikult pole ükski peatelgedest fikseeritud.

Üldjuhul on keha inertsimomendid peatelgede suhtes erinevad: $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. Telgsümmeetriaga kehal on kaks inertsimomenti ühesuurused, kolmas aga üldjuhul nendest erinev: $I_1 = I_2 \neq I_3$. Ning lõpuks on tsentraalsümmeetriaga kehal kõik kolm inertsimomenti ühesugused: $I_1 = I_2 = I_3$.

Kui keha pöörleb tingimustes, kus puuduvad igasugused välismõjud, siis osutub püsivaks ainult pöörlemine peatelgede ümber, mille suhtes inertsimomendi väärtus on kas minimaalne või maksimaalne. Pöörlemine ümber telje, mille suhtes inertsimomendil on mingi vahepealne väärtus, on ebapüsiv. See tähendab, et jõud, mis tekivad pöörlemistelje vähimalgi kõrvalekalduisel inertsimomendi vahepealse väärtusega peateljest, mõjuvad nii, et see kõrvalekalduine hakkab suurenema. Kui kallutada pöörlemistelge keha pööreldes ümber püsiva telje, taastub niisugusel kallutamisel tekkivate jõudude mõjul pöörlemine vastava peatelje ümber.

Oeldus võib veenduda, jälgides risttahukakujulise keha (näiteks tikutoosi) liikumist, kui see on visatud üles ning kui samas on antud talle ka pöörliikumine.¹ Ilmneb, et langedes saab keha pöörelda püsivalt telgede ümber, mis läbivad kas kõige suure-

¹ Raskusjõu mõju pole sel juhul oluline, see tingib vaid pöörlemisega samaaegselt toimuva langemise.



Joon. 117

maid või kõige väiksemaid tahke. Katsed visata keha nii, et ta pöörleks keskmisi tahkusi läbiva telje ümber, ei õnnestu.

Kui kehale mõjub välisjõud, näiteks niidi poolt, mille otsa pöörlev keha on riputatud, siis osutub püsivaks pöörlemine ainult selle peatelje ümber, mille suhtes inertsimoment on kõige suurem. Sel põhjusel pöörleb ühte otsa pidi niidi abil üles riputatud peenike varras lõpptulemusena ümber telje, mis on selle vardaga risti ning läbib tema keskpunkti (joon. 117, a). Analoogiliselt käitub ka servapidi niidi otsa riputatud ketas (joon. 117, b).

§ 43. JÄIGA KEHA IMPULSIMOMENT

§ 38 leitud jäiga keha impulsimomendi avaldis

$$L_z = I_z \omega \quad (43.1)$$

kehtib ainult niisugusel juhul, kui keha pöörleb liikumatu telje ümber, s.o. kas ruumis laagrite abil kinnitatud telje või vaba telje ümber. Teistel juhtudel on L ja ω seos keerulisem, näiteks ei ühti impulsimomendi vektori L ja nurkkiiruse vektori ω suunad.

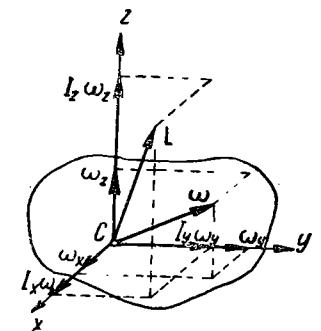
Suuname koordinaatteljed¹ mööda inertsipeatelgesid. Vektor ω ärgu ühtigu mitte ühegagi nendest telgedest (joon. 118). Üldjuhul on nurkkiiruse telgedesuunalised komponendid ω_x , ω_y , ω_z kõik nullist erinevad. Valemi (43.1) alusel annab korrutis $I_z \omega_z$ vektori L z -telje suunalise komponendi. Analoogiliselt annab $I_x \omega_x$ komponendi L_x ja $I_y \omega_y$ komponendi L_y . Kui inertsimomendid peatelgede suhtes I_x , I_y , I_z ei ole omavahel võrdsed, siis resultantvektor $L = L_x + L_y + L_z$, nagu näha jooniselt 118, ei ühti suuna poolest vektoriga ω . Ainult siis, kui ω on suunatud mööda ühte peatelge, näiteks mööda telge z , on kaks komponenti ω_x ja ω_y nullid, seega on nullid ka L_x ja L_y ning me saame valemi (43.1).

Niisiis, kui valida koordinaattelgedeks keha inertsipeateljed, siis valitseb vektorite ω ja L vahel seos

$$L = I_x \omega_x + I_y \omega_y + I_z \omega_z. \quad (43.2)$$

Silmas pidades, et $\omega_x = \omega_x i$ jne., saab viimasele avaldisele anda kuju:

¹ Mõeldakse keha jäigalt ühenduses olevaid ning temaga koos pöörlevaid telgi.



Joon. 118

$$\mathbf{L} = (I_x \omega_x) \mathbf{i} + (I_y \omega_y) \mathbf{j} + (I_z \omega_z) \mathbf{k},$$

millest järeldub, et vektorite \mathbf{L} ja $\boldsymbol{\omega}$ projektsioonide vahel valitsevad seosed:

$$L_x = I_x \omega_x, \quad L_y = I_y \omega_y, \quad L_z = I_z \omega_z. \quad (43.3)$$

Need seosed osutuvad veel keerulisemateks, kui koordinaatteljed ei ühti keha inertsipeatelgedega. Sel juhul näevad vektorite \mathbf{L} ja $\boldsymbol{\omega}$ projektsioonide seosed välja järgmiselt:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z, \\ L_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z, \\ L_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (43.4)$$

Üheksa suurust I_{ik} ($i, k = x, y, z$) moodustavad nn. sümmeetrilise teist järku inertsitensori.¹ Tensori komponendid I_{ik} sõltuvad koordinaattelgede valikust. Kui koordinaatteljed langevad kokku keha inertsipeatelgedega, on kõik komponendid peale I_{xx} , I_{yy} ja I_{zz} nullid ning valemite (43.4) saavad valemid (43.3) (seostes (43.3) on I_{xx} tähistatud I_x jne.).

Märgime, et ainepunktide süsteemi puhul tuletatud võrrand (37.11) kehtib ka jäiga keha korral. \mathbf{L} all tuleb sel juhul mõista vektorit, mille projektsioonid koordinaattelgedel on määratud valemitega (43.4).

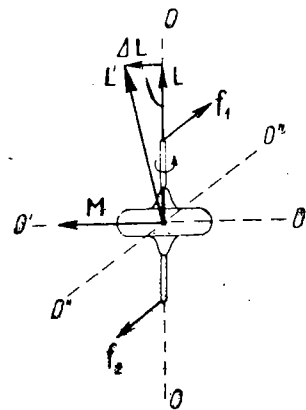
Lõpuks vaatleme jäiga keha pöörlemist ümber liikumatu telje z , mis ei ühti mitte ühegi inertsipeatelgedest. Niisugune telg saab olla liikumatu ainult välisjõudude mõjul (vt. näiteks joon. 113). Nende jõudude moment telje z suhtes on ilmselt null (jõudude mõjusirged läbivad telge), kuid jõudude moment sellel teljel suvaliselt valitud punkti O suhtes ei ole null. Sel põhjusel jääb keha impulsimoment telje z suhtes muutumatuks ($\frac{d}{dt} L_z = M_z$,

kuid $M_z = 0$), impulsimoment punkti O suhtes aga, mis sel juhul ei ühti suuna poolest mööda z -telge suunatud vektoriga $\boldsymbol{\omega}$, pöörduv ruumis koos kehaga temaga risti oleva välisjõudude momendi \mathbf{M} mõjul ($\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{M} \neq 0$).

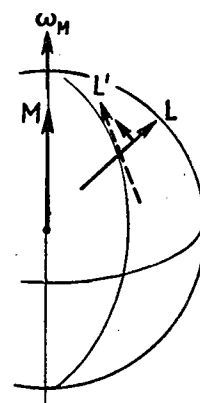
§ 44. GÜROSKOOBID

Güroskoobiks ehk vurriks nimetatakse massiivset sümmeetrilist keha, mis pöörleb suure kiirusega sümmeetriatelje ümber. Sümmeetriatelg on üks güroskoobi inertsipeatelgi, seepärast ühtib güroskoobi impulsimoment suuna poolest pöörlemisteljega.

¹ Tensorit nimetatakse sümmeetriliseks, kui tema komponendid rahuldavad tingimust $I_{ik} = I_{ki}$.



Joon. 119

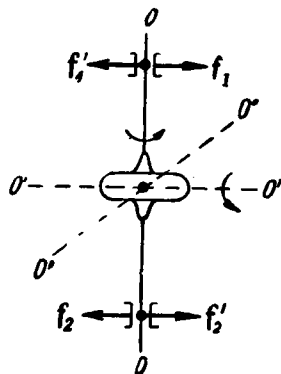


Joon. 120

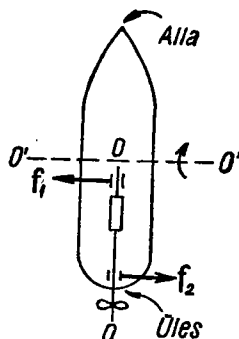
Selleks et muuta güroskoobi telje asendit ruumis, on tarvis vastavalt võrrandile (37.11) rakendada talle välisjõudude moment. Seejuures ilmneb nähtus, mida on hakatud nimetama güroskoopiliseks efektiks: jõudude mõjul, mis peaksid kutsuma esile güroskoobi telje OO pöörlemise sirge $O'O'$ ümber (joon. 119), pöörduv güroskoobi telg ümber sirge $O''O''$ (oletatakse, et telg OO ja sirge $O'O'$ asuvad joonise tasapinnas, sirge $O''O''$ ning jõud \mathbf{f}_1 ja \mathbf{f}_2 aga on selle tasapinnaga risti).

Güroskoobi esimesel pilgul «ebaloomulik» käitumine on, nagu selgub, täielikus kooskõlas pöörlemise dünaamika seadustega, s.o. Newtoni seadustega. Tõepoolest, jõudude \mathbf{f}_1 ja \mathbf{f}_2 moment on suunatud mööda sirget $O'O'$. Ajavahemiku Δt kestel saab güroskoobi impulsimoment \mathbf{L} juurdekasvu $\Delta \mathbf{L} = \mathbf{M} \Delta t$, mille suund ühtib vektori \mathbf{M} suunaga. Güroskoobi impulsimoment ajavahemiku Δt lõpuks on võrdne resultandiga $\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \Delta \mathbf{L}$, mis asub joonise tasapinnas. Vektori \mathbf{L}' suund ühtib güroskoobi pöörlemistelje uue suunaga. Seega pöörduvki güroskoobi pöörlemistelg ümber sirge $O''O''$ nii, et vektorite \mathbf{M} ja \mathbf{L} vaheline nurk väheneb. Kui mõjutada güroskoopi pikemat aega suuna poolest muutumatu välisjõudude momendiga \mathbf{M} , võtab güroskoobi telg lõpuks niisuguse asendi, et tema telg ja omapöörlemise suund ühtivad välisjõudude mõjul toimuva pöörlemise telje ja suunaga (vektor \mathbf{L} ühtib suuna poolest vektoriga \mathbf{M}).

Güroskoopiline efekt sai aluseks güroskoopilise kompassi ehk gürokompassi ehitamisel. See riist kujutab endast güroskoopi, mille telg saab vabalt pöörduda horisontaaltasapinnas (joon. 120). Maakera ööpäevase pöörlemise tagajärjel mõjuvad gürokompassile jõud, mis püüavad tõmmata teda kaasa pöörlemisse ümber maakera telje (analoogiliselt sellega, kuidas jõud \mathbf{f}_1 ja \mathbf{f}_2 joonisel 119 püüavad tõmmata güroskoopi pöörlemisse



Joon. 121



Joon. 122

sirge $O'O'$ ümber). Selle tulemusena pöörduv güroskoobi telg nii, et güroskoobi impulsimomendi L ja Maa pöörlemise nurkkiiruse ω_M vaheline nurk väheneb. Protsess toimub seni, kuni nurk L ja ω_M vahel saab minimaalseks, s. o. kuni güroskoobi telg jääb meridiaani tasapinda (erinevalt kirjeldatud üldjuhust saab gürokompassi telg pöörduda ainult horisontaaltasapinnas).

Gürokompassi eelis võrreldes magnetkompassiga seisneb selles, et tema näidule pole vaja teha parandust nn. magnetilise deklinatsiooni arvel,¹ samuti pole vaja hoolitseda selle eest, et osutile ei avaldaks mõju läheduses asuvad ferromagnetilised esemed (näiteks laeva teraskorpus jne.). Sel põhjusel kasutataksegi tänapäeval navigatsioonis gürokompassse.

Güroskoopilised jõud. Katsetes kutsuda esile güroskoobi telje pöördumist soovitud suunas tekivad güroskoopilise efekti tulemusena güroskoopilised jõud, mis mõjuvad güroskoobi telje tugele. Nii näiteks güroskoobi telje OO sundpöördumisel sirge $O'O'$ ümber (joon. 121) püüab telg OO pöörduda ümber telje $O''O''$. Selle pöörlemise ärahoidmiseks tuleb güroskoobi teljele rakendada laagrite kaudu jõud f_1' ja f_2' . Newtoni kolmanda seaduse järgi mõjutab telg laagreid jõududega f_1 ja f_2 . Viimased ongi güroskoopilised jõud.

Güroskoopilisi jõudusid on vaja arvestada näiteks laeva auruturbiini laagrite konstrueerimisel. Turbiini rootor kujutab endast güroskoopi. Laeva pikikõikumisel toimub turbiini telje sundpöördumine ümber sirge $O'O'$ (joon. 122). See kutsub esile güroskoopiliste jõudude f_1 ja f_2 tekkimise, mis omakorda põhjustab lisarõhumise, vahel küllalt suure, laagritele.

Güroskoobi pretsessioon. Kui güroskoobile mõjub välisjõu-

¹ Deklinatsiooniks nimetatakse nurka geograafilise ja magnetilise meridiaani vahel.

dude moment, mille väärtus jääb muutumatuks, kuid mis pöörduv koos güroskoobi teljega, moodustades sellega pidevalt täisnurga, siis tekib erilise iseloomuga liikumine. Niisugustes tingimustes on näiteks šarniiril pöörleva teljega güroskoop Maa raskusväljas (joon. 123).

Güroskoobile rakendatud välisjõudude momendi moodul

$$M = mgl \sin \alpha, \quad (44.1)$$

kus m on güroskoobi mass, l — šarniiri kaugus güroskoobi inertsi keskmest, α — nurk, mille güroskoobi telg moodustab vertikaaliga. Moment M on suunatud risti güroskoobi telge läbiva vertikaaltasandiga (joonisel 123 on see tasapind viirutatud).

Jõudude momendi M mõjul saab güroskoobi impulsimoment L ajavahemikus dt juurdekasvu

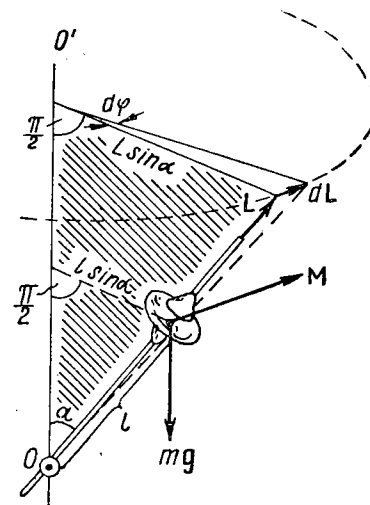
$$dL = Mdt, \quad (44.2)$$

mis suuna poolest ühtib vektoriga M , s. t. on risti vektoriga L . Muutus, mis toimub vektoriga L , kui see on saanud juurdekasvu dL , vastab güroskoobi telje niisugusele pöördumisele vertikaalsirge OO' ümber, mille puhul nurk α ei muutu. Güroskoobi telge läbiv vertikaaltasapind pöörduv selle aja vältel nurga $d\varphi$ võrra. Samal ajal pöörduv sama nurga võrra horisontaaltasapinnas vektor M . Selle tulemusena on ajavahemiku dt lõpus vektorite L ja M vastastikune asetus sama, mis oli algmomendil.

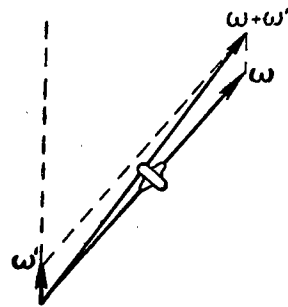
Järgneva ajaelemendi dt jooksul saab vektor L juurdekasvu dL , mis on risti vektori L uue, «esimese» elementaarpöörde tulemusena tekkinud suunaga jne. Nii pöörduv güroskoobi telg pidevalt ümber šarniiri O läbiva vertikaali, joonestades koonuse tippnurgaga 2α . Vektor L muudab seejuures ainult suunda, tema moodul jääb konstantseks, sest juurdekasvud dL on kogu aeg risti vektoriga L .

Ülalkirjeldatud liikumist nimetatakse güroskoobi pretsessiooniks; see on güroskoobi telje liikumine välisjõudude mõjul, mis toimub nõnda, et telg joonestab koonuse (erijuhul, kui $\alpha = \pi/2$, kõduneb koonus tasapinnaks).

Vektor L käitub pretseseeerimisel nagu kiirusvektor ühtlasel ringliikumisel. Viimasel juhul on kiiruse elementaarjuurdekasv dv kogu aeg risti vektoriga v ning võrdne wdt , kus $|w|$ on kons-



Joon. 123



Joon. 124

punkt ühtib šarniiriga O):

$$d\varphi = \frac{|dL|}{L \sin \alpha}. \quad (44.3)$$

Arvestades seoseid (44.2) ja (44.1), saame

$$|dL| = Mdt = mgl \sin \alpha dt.$$

Teinud selle asenduse ning võtnud arvesse, et $L = I\omega$, saame

$$d\varphi = \frac{mgl \sin \alpha dt}{I\omega \sin \alpha} = \frac{mgl}{I\omega} dt.$$

Pretsessiooni nurkkiirus

$$\omega' = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgl}{I\omega}. \quad (44.4)$$

Avaldisest (44.4) järeldub, et pretsessiooni nurkkiirus ei sõltu güroskoobi telje kaldest horisondi suhtes.

Et impulsimoment $I\omega$ on tavaliselt suur, siis pretsessiooni kiirus ω' on väike. ω' on seda väiksem, mida suurem on ω . Güroskoobi pöörlemise nurkkiiruse ω vähenedes pretsessiooni kiirus ω' kasvab.

Tuleb silmas pidada, et pretsessiooni korral ei ühti güroskoobi impulsimoment tema sümmeetriateljega, sest güroskoobi liikumine on kahe pöörlemise summa; üks pöörlemine toimub ümber sümmeetriatelje nurkkiirusega ω ning teine ümber vertikaaltelje pretsessiooni nurkkiirusega ω' . Summaarse liikumise nurkkiirus on $\omega + \omega'$ (joon. 124). Kuid seetõttu, et $\omega' \ll \omega$, võib ligikaudu lugeda $\omega + \omega' \approx \omega$ ning $L = I\omega$. Pretsessiooni nurkkiiruse valemi (44.4) tuletamisel kasutasimegi seda lähendust.

§ 45. JAIGA KEHA DEFORMATSIOONID

Nagu juba öeldud, toimub jõudude mõjul kehade deformatsioon, s. o. nende mõõtmete ja kuju muutumine. Kui pärast deformatsiooni esilekutsunud jõudude mõju lakkamist võtab keha esialgsed mõõtmed ja kuju, nimetatakse deformatsiooni elastseks. Siinkohal vaatlemegi peamisi elastseid deformatsioone.

Elastsed deformatsioonid tekivad siis, kui deformatsiooni esilekutsuv jõud ei ületa teatud piirväärtust, mille peab määrama iga konkreetse keha puhul eraldi. Selle piirväärtuse ületamisel saab keha jääva ehk plastilise deformatsiooni, mis säilib pärast jõudude mõju lakkamist.

Kõikvõimalikud tahke keha elastse deformatsiooni liigid võib taandada kahele põhiliigile: need on tõmme (või surve) ja nihe.

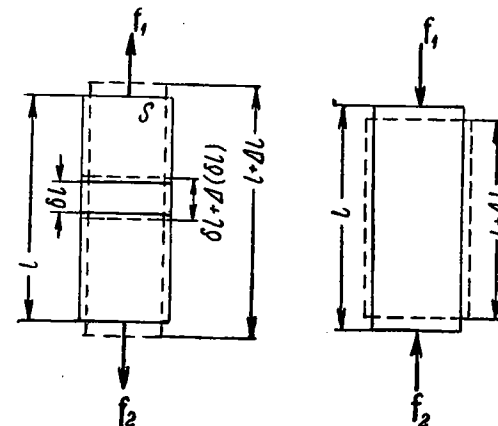
Pikitõmme (või ühesihiline surve). Kui ühtlase ristlõikega homogeense varda otstele rakendada piki selle telge mõjuvad jõud f_1 ja f_2 ($f_1 = f_2 = f$), mille mõju on ühtlaselt jaotatud varda ristlõike ulatuses, siis varda pikkus l saab juurdekasvu Δl , mis on positiivne (tõmbel) või negatiivne (survel) (joon. 125). Seejuures saab iga suvaliselt valitud vardaelement δl oma pikkusega

võrdelise juurdekasvu $\Delta(\delta l)$, nii et suhe $\frac{\Delta(\delta l)}{\delta l}$ on varda kõikide

elementide jaoks sama. Seepärast on loomulik võtta varda deformatsiooni iseloomustavaks suuruseks tema pikkuse suhteline muutus:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (45.1)$$

Nagu definitsioonist järeldub, on suhteline pikenemine ε



Joon. 125

nimeta suurus. Tõmbe korral on ta positiivne, surve puhul aga negatiivne.

Katse näitab, et antud materjalist valmistatud varraste elastisel deformeerimisel on suhteline pikenemine võrdeline varda ristlõikepindala ühiku kohta tuleva jõuga:

$$\varepsilon = \alpha \frac{f}{S}. \quad (45.2)$$

Võrdetegurit α nimetatakse elastsusteguriks. See sõltub ainult varda materjali omadustest.

Pindalaühiku kohta tulevat jõudu nimetatakse pingeks. Kehaosade omavahelise vastastikuse mõju tõttu kandub pinge keha kõikidesse punktidesse — varras on kogu ruumala ulatuses pingestatud olekus. Kui jõud on suunatud mööda pinnanormaali, nimetatakse pinget normaalpingeks. Kui jõud mõjub pinna puutuja suunas, on tegemist tangentsiaalpingega. Normaalpinget on hakatud tähistama tähega σ ning tangentsiaalpinget tähega τ .

Võtnud kasutusele normaalpinge

$$\sigma = \frac{f}{S}, \quad (45.3)$$

saame kirjutada võrrandi (45.1) järgmisel kujul:

$$\varepsilon = \alpha \sigma. \quad (45.4)$$

Seega osutub suhteline pikenemine võrdeliseks normaalpingega. Võrrandist (45.4) järeldub, et elastsustegur α on arvuliselt võrdne ühikulisele pingele vastava suhtelise pikenemisega.

Kõrvuti elastsusteguriga α kasutatakse materjali elastsusomaduste iseloomustamiseks selle pöördsuurust $E = 1/\alpha$, mida nimetatakse Youngi mooduliks.

Asendanud elastsusteguri võrrandis (45.4) Youngi mooduli kaudu, saame

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (45.5)$$

kust järeldub, et Youngi moodul on võrdne normaalpingega, millele vastav suhteline pikenemine on võrdne ühega (pikkuse juurdekasv Δl võrdub varda esialgse pikkusega l), kui nii suured elastsed deformatsioonid oleksid võimalikud (tegelikult katkeb varras palju väiksemate pingete juures ning veel enne seda saavutatakse elastsuspiir).

Arvestades valemid (45.1) ja (45.5), saame avaldise (45.3) teisendada kujule:

$$f = \frac{ES}{l} \Delta l = k \Delta l, \quad (45.6)$$

kus k on antud varda jaoks konstantne tegur.

Avaldisest (45.6) näeme, et elastse deformatsiooni korral on varda pikenemine võrdeline sellele mõjuva jõuga. Valem (45.6) väljendab Hooke'i seadust antud deformatsiooni puhul. See seadus kehtib seni, kuni pole saavutatud elastsuspiiri.

Samaaegselt varda pikkuse muutumisega toimub ka tema ristlõike mõõtmete d vastav muutumine (joon. 125). Seda on hakatud iseloomustama suhtelise paisumise või suhtelise kokkutõmbumise:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}. \quad (45.7)$$

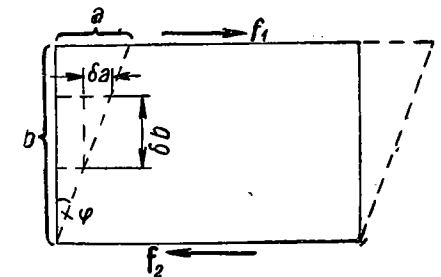
Ilmselt on ε ja ε' alati vastandmargilised: tõmbe korral on Δl positiivne ning Δd negatiivne, surve korral on Δl negatiivne ning Δd positiivne. Katsete põhjal on selgunud, et ε ja ε' on võrdelised suurused:

$$\varepsilon' = -\mu \varepsilon, \quad (45.8)$$

kus μ on positiivne võrdetegur, mis sõltub ainult materjali omadustest. Seda tegurit nimetatakse põikdeformatsiooni ehk Poissoni teguriks.

Nihe. Võtame risttahukakuulise homogeeni keha ning rakendame selle keha vastastahkudele nende tahkudega paralleelsed jõud f_1 ja f_2 ($f_1 = f_2 = f$) (joon. 126). Kui jõudude mõju on vastava tahu pindala S ulatuses ühtlaselt jaotunud, siis tekib selle tahuga paralleelses suvalises lõikes tangentsiaalpinge

$$\tau = \frac{f}{S}. \quad (45.9)$$



Joon. 126

Pingete mõjul deformeerub keha nii, et ülemine tahk nihkub alumise suhtes mingi suuruse a võrra. Kui jagada keha mõttes horisontaalseteks elementaarkihtideks, siis iga kiht osutub naaberkihtide suhtes nihkunuks, seepärast nimetataksegi niisugust deformatsiooni nihkeks.

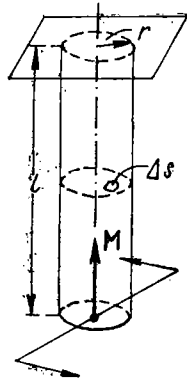
Nihkedeformatsiooni korral pöördub iga algul horisontaalkihtidega risti olnud sirge mingi nurga φ võrra. Järelikult on kahe suvaliselt valitud kihi nihke δa ja nende kihtide vahelise kauguse δb suhe ühesugune mistahes kihtide paari puhul. Seda suhet on loomulik pidada nihkedeformatsiooni karakteristikuks:

$$\gamma = \frac{a}{b} = \tan \varphi. \quad (45.10)$$

Suurust γ nimetatakse suhteliseks nihkeks. Nurga φ

väiksuse tõttu võib võtta $\tan \varphi \approx \varphi$. Järelikult on suhteline nihe γ võrdne nihkenurgaga φ . Katsed näitavad, et suhteline nihe on võrdeline tangentsiaalpingega:

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau. \quad (45.11)$$



Joon. 127

Võrdetegur G sõltub ainult materjali omadustest ning teda nimetatakse nihkeelastsusmooduliks. See on võrdne niisuguse tangentsiaalpingega, mille puhul nihkenurk oleks 45° ($\tan \varphi = 1$), kui nii suurte deformatsioonide tekitamisel ei ületataks elastsuspiiri.

Peale juba vaadeldud põhideformatsioonide käsitleme veel ümmarguse varda väändet. Kui kinnitada ümmarguse varda üks ots jäigalt, teisele aga rakendada mööda varda telge suunatud pöördemoment M (joon. 127), siis saab varras niisuguse deformatsiooni, et tema alumise otsa pind pöörduv ülemise suhtes mingi nurga φ võrra.

Arusaadavalt kujutab väändedeformatsioon endast nihet. Tõepoolest, kui jagada varras mõttes teljega risti olevateks elementaarkihtideks, siis väändel nihkub iga niisugune kiht naaberkihtide suhtes. Tõsi küll, see nihe pole ühtlane: kihi osa ΔS on analoogilise osa suhtes nihkunud seda rohkem, mida kaugemal on ta varda teljest.

Teinud vastavad arvutused, on kooskõlas katsetega võimalik tõestada, et varda väändenurk

$$\varphi = \frac{2l}{\pi r^4 G} M, \quad (45.12)$$

kus l on varda pikkus, r — tema raadius, G — nihkeelastsusmoodul, M — pöördemoment.

Tähistanud M ees seisva konstantse teguri tähega k , saame avaldisele (45.12) anda kuju:

$$\varphi = kM. \quad (45.13)$$

Viimane valem väljendab Hooke'i seadust väändel. Antud materjalist valmistatud ühesuguse pikkusega varraste korral sõltub võrdetegur k väga tugevasti varda jämedusest (seoses $1/r^4$).

Elastse deformatsiooni energia. Elastelt deformeeritud keha, näiteks tõmmatud või surutud varras, pöördues tagasi deformeerimata olekusse, võib analoogiliselt väljavenitatud või kokkusurutud vedruga teha tööd, s. t. tal on teatud energiavaru.¹ Et energia on tingitud keha elementide vastastikusel asetusest, siis on see järelikult potentsiaalne energia. Deformeeritud keha energia-

¹ Vt. (27.13) ning vastavat teksti.

varu on ilmselt võrdne tööga, mis välisjõud on keha deformeerimiseks teinud.

Arvutame elastelt tõmmatud (surutud) varda energia. Tõmbel peab varrast mõjutama jõuga, mille suuruse määrab avaldis (45.6). Selle jõu töö

$$A = \int_0^{\Delta l} f dx,$$

kus tähega x on tähistatud varda absoluutne pikenemine, mis deformeerimisel muutub 0 kuni Δl .

Pikenemisele x vastav jõud on seose (45.6) järgi

$$f = kx = \frac{ES}{l} x.$$

Järelikult,

$$A = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l} x dx = \frac{ES}{l} \frac{\Delta l^2}{2} = U.$$

Korrutame saadud avaldise lugeja ja nimetaja l -ga, asendame suhte $\Delta l/l$ suhtelise pikenemisega ε ning arvestame, et Sl on varda ruumala V . Siis saame:

$$U = \frac{E\varepsilon^2}{2} V. \quad (45.14)$$

Võtame vaatluse alla energia ruumtiheduse u , mis on võrdne ruumiosas ΔV sisalduva energia ΔU ja selle ruumiosa suhtega

$$u = \frac{\Delta U}{\Delta V}.$$

Et varras on homogeenne ja deformatsioon ühtlane, s. o. varda eri punktides ühesugune, siis on ka energia vardas jaotatud ühtlaselt, ühesuguse tihedusega. Seepärast võib arvestada, et

$$u = \frac{U}{V} = \frac{E\varepsilon^2}{2}. \quad (45.15)$$

Valem (45.15) annab elastse deformatsiooni energiatiheduse tõmbel (või survel).

Analoogiliselt saab tuletada elastse deformatsiooni energiatiheduse nihkel:

$$u = \frac{G\gamma^2}{2}. \quad (45.16)$$

¹ Võrrutades leitud töö potentsiaalse energiaga, oletasime, et deformeerimata keha energia on null.