I. SAVELJEV

FÜÜSIKA ÜLDKURSUS

1

Lubatud NSV Liidu Kõrgema ja Keskeri-hariduse Ministeeriumi poolt kasutada õpikuna tehniliste kõrgkoolide üliõpilastel

„VALGUS" TALLINN 1978

53
S 19

Originaali tiitel:

И. В. Савельев

Курс общей физики
Том I

Механика, колебания и волны. Молекулярная физика
Издание пятое, стереотипное
Допущено министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений
Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва 1973

Vene keelest tõlkinud O. Mankin

Kaane kujundanud J. Tammsaar

S $\frac{20400-078}{M 902(16)-78}$ 20—77

Esimene osa

MEHAANIKA FÜÜSIKALISED ALUSED

Mehaanika on õpetus mateeria liikumise lihtsaimast vormist, mis seisneb kehade või nende osade ümberpaiknemises üksteise suhtes.

Kehade ümberpaiknemist märkame kõikjal igapäevases elus. Siit järeldub mehaanika ettekujutuste piltlikkus. Samaga on seletatav ka fakt, et kõikidest loodusteadustest just mehaanika arenes välja kõige varem.

Ühe ja sama keha liikumine eri kehade suhtes võib olla erineva iseloomuga. Kui näiteks keha *1* on meie suhtes paigal, kehad *2* ja *3* aga liiguvad samas suunas ühesuguse kiirusega, siis keha *3* liigub keha *1* suhtes, kuid keha *2* suhtes on ta paigal. Seepärast peab liikumise kirjeldamisel leppima kokku, missuguse keha või üksteise suhtes liikumatute kehade rühma suhtes antud keha liikumist vaadeldakse. Selleks valitud keha (või kehade rühm) moodustab taustsüsteemi.

Praktiliselt tuleb liikumise kirjeldamiseks siduda taustsüsteemi moodustavate kehadega mingi koordinaatide süsteem, näiteks Descartes'i ehk ristkoordinaatide süsteem.

Keha koordinaadid võimaldavad määrata tema asukohta ruumis. Kuid liikumine toimub nii ruumis kui ka ajas (ruum ja aeg on mateeria olemise lahutamatud vormid), seepärast peab liikumise kirjeldamisel arvestama ka aega. Seda tehakse kella abil.

Omades väljavalitud taustsüsteemiga seotud koordinaatide süsteemi ja kella, võib asuda kirjeldama kehade liikumist.

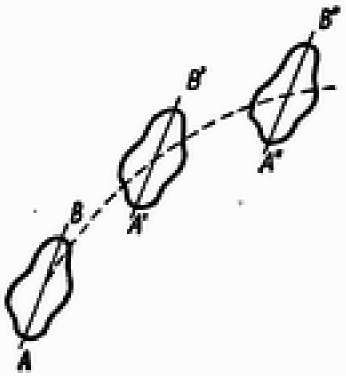
Tavaliselt toimub liikumine tingimustes, kus kehadele mõjuvad jõud. Nende jõudude mõju määrab kehade liikumise iseloomu ja kutsub peale selle esile ka kehade deformatsiooni, s. o. muudab nende mõõtmeid ja kuju. Väga tihti on deformatsioonid nii tühised, et neid ei pruugi kehade liikumise kirjeldamisel arvestada. Keha, mille deformatsiooni antud ülesandes võib jätta arvesse võtmata, nimetatakse **absoluutselt jäigaks kehaks**. Tuleb silmas pidada, et absoluutselt jäiku, s. o. absoluutselt mittedeformeeruvaid kehi looduses ei ole. Kui aga kehade liikumisel teatud tingimustes osutub deformatsioon tühiseks, võib neid kehi vaadelda kui absoluutselt jäiku.

Mõnikord võib liikumise uurimisel jätta kehade mõõtmed arvestamata: siis, kui need on palju väiksemad kõikidest teistest mõõtmetest, millega antud ülesandes tegemist on. Näiteks auto liikumisel mööda teed Leningradist Moskvasse võib auto mõõtmed vabalt jätta arvestamata.

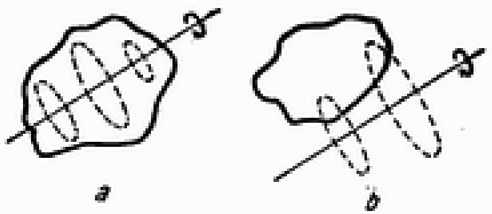
Keha, mille mõõtmed võib antud ülesandes jätta arvestamata, nimetatakse a i n e p u n k t i k s. See, kas keha võib vaadelda kui ainepunkti, ei sõltu mitte keha mõõtmetest, vaid ülesande tingimustest. Ühte ja sama keha võib ühel juhul käsitada ainepunktina, teisel juhul aga peab teda vaatlema kui ulatuslike mõõtmetega keha. Nii näiteks arvutades trajektoori, mida mööda Maa liigub ümber Päikese, võib Maad käsitada ainepunktina, kui aga on tegu kehade liikumisega mööda maapinda, peame Maad vaatlema kui suurt keha.

Jäiga keha igasuguse liikumise võime lahutada kaheks põhiliikumiseks — kulgemiseks ja pöörlemiseks.

Kulgliikumine on niisugune liikumine, milles suvaline, kehaga kindlalt seotud sirge, jääb iseenesega paralleelseks (joon. 1).



Joon. 1



Joon. 2

Pöörlemisel liiguvad keha kõik punktid mööda ringjooni ning nende ringjoonte tsentrid asuvad ühel ja samal sirgel, mida nimetatakse pöörlemisteljeks (joon. 2). Pöörlemistelg võib olla ka väljaspool keha (joon. 2, *b*).

Rääkides mõnest kehast kui ainepunktist ja jättes arvestamata tema mõõtmed, ei saa kõne alla tulla selle keha pöörlemine teda läbiva telje ümber.

Mehaanika jaguneb kolme ossa: 1) kinemaatika, 2) staatika ja 3) dünaamika. Kinemaatikas uuritakse kehade liikumist, arvestamata põhjusi, mis selle liikumise esile kutsuvad, staatika uurib kehade tasakaalutingimusi ning dünaamika liikumist seoses nende põhjustega (kehade interaktsioonidega), mis tingivad liikumise iseloomu. Kuna tasakaal on liikumise erijuht, siis järelduvad staatika seadused loomulikul viisil dünaamika seadustest. Sel põhjusel füüsikakursustes staatikat tavaliselt eraldi ei käsitleta.

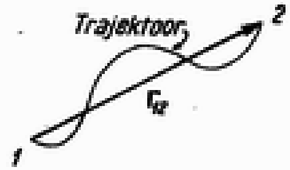
Esimene peatükk

KINEMAATIKA

§ 1. PUNKTI LIIKUMINE. VEKTORID JA SKALAARID

Ainepunkt joonestab liikudes mingi kõvera. Seda kõverat nimetatakse trajektooriks. Olenevalt trajektoori kujust eristatakse sirgliikumist, ringliikumist, kõverjoonelist liikumist jne.

Nihkugu ainepunkt (edaspidi nimetame seda lühiduse mõttes lihtsalt punktiks) mööda mingit trajektoori asukohast *1* asukohta *2* (joon. 3). Punktide *1* ja *2* vaheline kaugus, mõõdetud mööda trajektoori, kujutab läbitud teed. Tähistame selle tähega *s*.

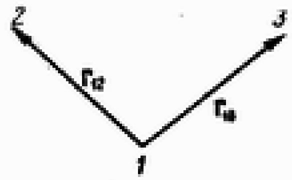


Joon. 3

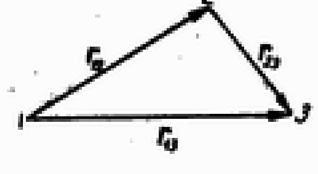
Punktist *1* punkti *2* tõmmatud sirglõiku nimetatakse n i h k e k s. Tähistame selle $\mathbf{r}_{12}$. Nihet iseloomustab peale suuruse (lõigu $\mathbf{r}_{12}$ pikkuse) ka suund. Tõepoolest, vaatleme kahte suuruselt ühesugust nihet $\mathbf{r}_{12}$ ja $\mathbf{r}_{13}$ (joon. 4). Vaatamata sellele, et nende lõikude pikkused on võrdsed, kujutavad nad ilmselt erinevaid nihkeid.

Sellised suurused nagu nihe alluvad erilisele liitmisreeglile, mille saame selgeks järgmise näite varal. Tehku mingi punkt läbi kaks järjestikust nihet $\mathbf{r}_{12}$ ja $\mathbf{r}_{23}$ (joon. 5). Kahe nihke summaks on loomulik nimetada niisugust nihet $\mathbf{r}_{13}$, mis annab sama tulemuse nagu kaks esimest nihet kokku.

Niisugust liiki suurusi nagu nihe, s. o. suurusi, mida iseloomustab arvväärtus ja suund ning mille liitmist teostatakse joonisel 5 näidatud reegli järgi, nimetatakse v e k t o r i t e k s.



Joon. 4



Joon. 5

Vektorite hulka kuuluvad kiirus, kiirendus, jõud ning mitmed teised suurused.

Suurusi, mille määramiseks piisab ainult arvväärtusest, nimetatakse s k a l a a r i d e k s. Skalaaride näidetena võib nimetada teed, aega, massi jne.

Vektoreid märgitakse tekstis poolpaksult. Näiteks nihkevektor punktist *1* punkti *2* on tähistatud $\mathbf{r}_{12}$. Sama täht tavalises kirjas iseloomustab vektori arvväärtust ehk, nagu öeldakse, tema moodulit.[1] Mooduli tähistamiseks kasutatakse veel vektori sümbolit kahe vertikaalkriipsu vahel. Nii näiteks

$|\mathbf{A}| = A$ on vektori **A** moodul,

$|\mathbf{r}_{12}| = r_{12}$ on vektori $\mathbf{r}_{12}$ moodul.

Vektori moodul on alati positiivne skalaar.

Joonistel märgitakse vektoreid sirglõikudena, mille ühes otsas on nool. Sirglõigu pikkus annab vektori mooduli vastavas mastaabis, noolega märgitud suund aga vektori suuna.

Joonisel 5 kujutatud vektorite liitmise operatsioon pannakse kirja järgmiselt:

$$\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{13}.$$

§ 2. MÕNINGAID TEADMISI VEKTORITEST

Vektoreid, mis on suunatud mööda paralleelseid sirgeid (kas samas suunas või vastupidistes suundades), nimetatakse k o l l i n e a a r s e t e k s.

Vektoreid, mis on paralleelsed ühe ja sama tasapinnaga, nimetatakse k o m p l a n a a r s e t e k s.

Samasuunalisi võrdsete moodulitega kollineaarseid vektoreid loetakse võrdseteks.[2] Vastassuunalisi võrdsete moodulitega kollineaarseid vektoreid loetakse erinevaiks märgi poolest (vastandmärgilisteks). Nii näiteks joonisel 6 kujutatud vektorite ja nende moodulite vahel kehtivad järgmised seosed:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}; \qquad \mathbf{A} = -\mathbf{C}; \qquad \mathbf{B} = -\mathbf{C};$$

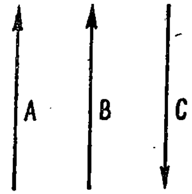
$$A = B = C \quad \text{ehk} \quad |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = |\mathbf{C}|.$$

Vektorite liitmine. Sellest, kuidas kahte vektorit resultantvektoriks liidetakse, oli juttu juba eelnevas paragrahvis. Vaatleme nüüd seda küsimust veidi üksikasjalisemalt. Olgu antud kaks vektorit **A** ja **B** (joon. 7, *a*). Resultantvektori **C** saamiseks kanname vektorit **B** paralleelselt iseenesega edasi nii, et tema alguspunkt ühtiks vektori **A** lõpuga.[1] (joon. 7,*b*). Vektori **A** algusest vektori **B** lõppu tõmmatud vektor **C** kujutabki endast resultantvektorit:

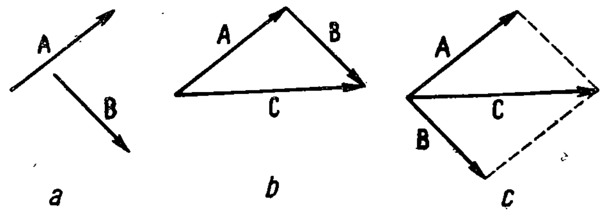
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

Kuid konstruktsiooni võib teostada ka veidi teisiti (joon. 7, *c*). Nihutame vektorit **B** (või **A**) nii, et mõlema vektori alguspunktid ühtiksid. Seejärel ehitame vektoritele **A** ja **B** rööpküliku. Ilmselt ühtib selle rööpküliku diagonaal vektoriga **C**, mis on saadud joonisel 7, *b* näidatud viisil. Seepärast öeldakse vahel, et vektoreid liidetakse rööpkülikureegli järgi.

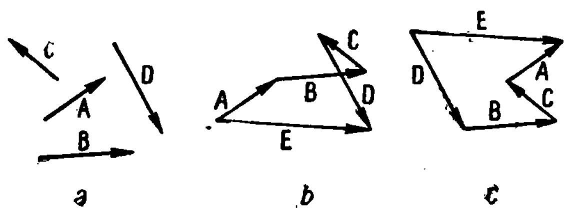
Mõlemad võtted, *b* ja *c*, annavad sama tulemuse, ent enam kui kahe vektori liitmisel osutub võte *b* lihtsamaks ja mugavamaks. Olgu antud vektorid **A**, **B**, **C** ja **D** (joon. 8). Nihutame neid iseendaga paralleelselt nii, et iga järgneva vektori algus ühtiks temale eelneva vektori lõpuga. Saame murdjoone. Resultantvektoriks on esimese liidetava vektori **A** algusest viimase vektori **D** lõppu tõmmatud vektor **E**. On kerge veenduda, et resultantvektor **E** ei sõltu vektorite liitmise järjekorrast. Joonisel 8, *b* on kujutatud juht $\mathbf{E} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}$, joonisel 8, *c* juht $\mathbf{E} = \mathbf{D} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{A}$.



Joon. 6



Joon. 7

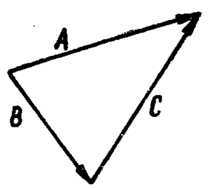


Joon. 8

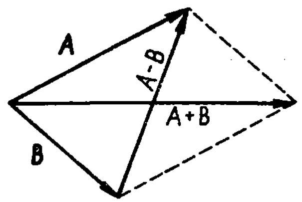
[1] Kirjutamisel märgitakse vektori tähise kohale nooleke (näit. $\vec{r}_{12}$). Sama, ilma nooleta täht tähendab vektori moodulit.

[2] Siin on juttu niinimetatud vabadest vektoritest, s. o. vektoritest, mida võib kanda mistahes ruumipunkti. Peale vabade esineb veel libisevaid vektoreid, mille alguspunkt saab nihkuda mööda vektorit läbivat sirget, ning seotud vektoreid, mis on rakendatud kindlas punktis. Kahte viimast liiki vektoreid saab avaldada vabade vektorite kaudu, seepärast on vektorarvutus rajatud vaba vektori mõistele, tavaliselt nimetatakse teda lihtsalt vektoriks.

[1] Niisugust ümberasetamist võib vaadelda kui vektori **B** asendamist temaga võrdse vektoriga, mille algus ühtib vektori **A** lõpuga.



Joon. 9



Joon. 10

Vektorite lahutamine. Kahe vektori **A** ja **B** vaheks **A** — **B** nimetatakse niisugust vektorit **C**, mis, liidetuna vektoriga **B**, annab vektori **A** (joon. 9). Kuna vahe **A** — **B** võib esitada kujul

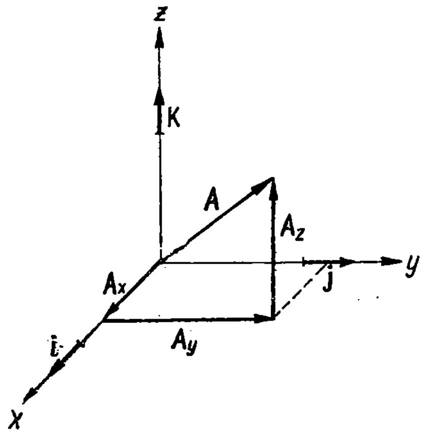
$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B}),$$

siis saame vektori **C**=**A** — **B**, kui liidame vektoriga **A** vektori, mis on võrdvastupidine vektoriga **B**.

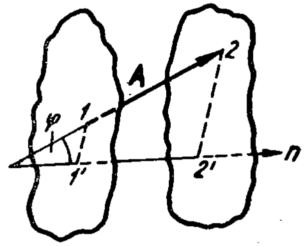
Joonisel 10 on kõrvutatud vektorite **A** ja **B** summat ja vahet.

Vektorite lahutamine komponentideks. Iga vektori **A** võib asendada mitme vektoriga $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ jne., mille summa annab vektori **A**. Niisugust vektori asendamise operatsiooni nimetatakse vektori **A** komponentideks lahutamiseks. Joonisel 11 on kujutatud vektori **A** lahutamine ristkoordinaadistiku telgede suunalisteks komponentideks. Sümbolitega $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{A}_z$ on tähistatud vektori **A** x-, y- ja z-telje suunalised komponendid.

Vektori projektsioon teljel. Olgu antud vektor **A** ning mingi suund ruumis (telg), mille tähistame näiteks tähega n (joon. 12). Tõmbame läbi vektori **A** algus- ja lõpp-punkti suunaga n risti olevad tasapinnad. Punkte $1'$ ja $2'$, kus need tasapinnad lõikuvad n-tel-



Joon. 11



Joon. 12

jega, nimetatakse vektori alguse ja lõpu projektsioonideks n-teljel. Tasapindade vahele jääv telje lõik on vektori **A** projektsioon suunal (teljel) n. Vektori projektsioon on skalaar. Kui suund punktist $1'$ punkti $2'$ ühtib suunaga n, loetakse projektsioon positiivseks, vastasel juhul on projektsioon negatiivne.

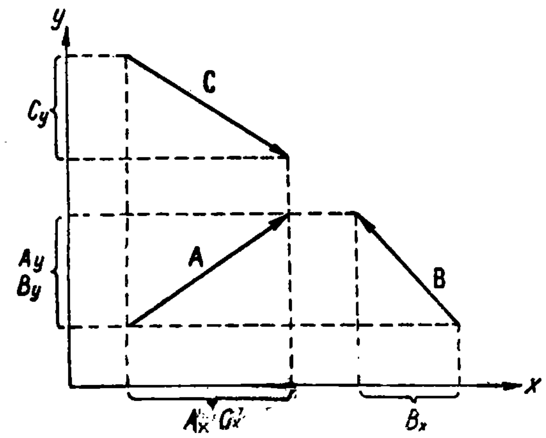
Projektsiooni märgitakse sama tähega mis vektorit, lisades vektori projitseerimissuuna indeksi. Näiteks vektori **A** projektsiooni suunal n tähistatakse A_n.

Võtame vaatluse alla nurga φ, mille vektor **A** moodustab n-teljega (joon. 12). Projektsiooni A_n saab nähtavasti arvutada järgmiselt:

$$A_n=A\cos\varphi, \tag{2.1}$$

kus A on vektori **A** moodul.

Kui vektor moodustab antud suunaga teravnurga, on selle nurga koosinus positiivne ning vektori projektsioon samuti positiivne. Kui vektor moodustab teljega nürinurga, on selle nurga koosinus negatiivne ning negatiivne on ka vektori projektsioon. Kui vektor on risti teljega, on tema projektsioon võrdne nulliga.

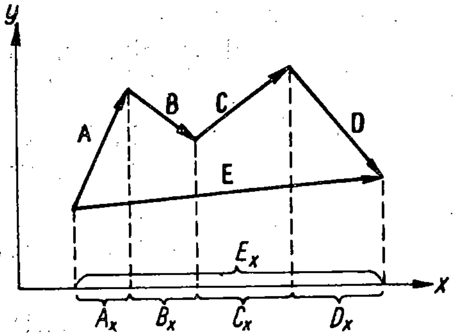


Joon. 13

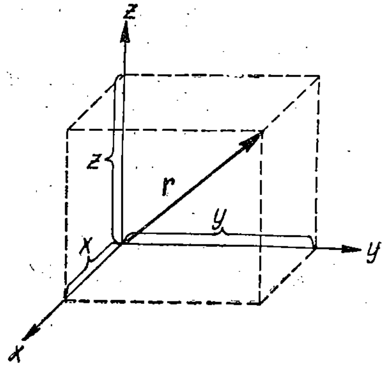
Joonisel 13 on kujutatud mitme vektori projektsioonid koordinaattelgedel x ja y. Nende projektsioonide kohta kehtivad alljärgnevad suhted:

$$A_x=C_x>0, \quad B_x<0;$$
$$A_y=B_y>0, \quad C_y<0.$$

Kui vektor **A** moodustab telgedega x, y ja z nurgad α, β ja γ, siis tema projektsioonid on:



Joon. 14



Joon. 15

$$\left.\begin{aligned} A_x &= A\cos\alpha, \\ A_y &= A\cos\beta, \\ A_z &= A\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

On kerge mõista, et vektori projektsioonide järgi kolmel koordinaatteljel saab konstrueerida selle vektori enese. Järelikult saab iga vektori määrata kolme arvuga — tema projektsioonidega koordinaattelgedel. Tuletame meelde, et skalaari määrab üksainus arv.

Vaatleme mitme vektori summat $\mathbf{E}=\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D}$ (joon. 14). Ilmselt

$$E_x = A_x + B_x + C_x + D_x, \qquad (2.3)$$

s. o. vektorite summa projektsioon teataval suunal on võrdne liidetavate vektorite projektsioonide summaga samal suunal.

Raadiusvektor. Punkti raadiusvektoriks nimetatakse koordinaatide alguspunktist antud punkti tõmmatud vektorit (joon. 15). Raadiusvektor $\mathbf{r}$ määrab üheselt punkti asukoha ruumis. Nagu jooniselt näha, on tema projektsioonid koordinaattelgedel võrdsed punkti koordinaatidega:

$$r_x = x; \quad r_y = y; \quad r_z = z. \qquad (2.4)$$

Vektori $\mathbf{r}$ mooduli ruut on võrdne koordinaatide ruutude summaga:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \qquad (2.5)$$

Vektori korrutamine skalaariga. Vektori $\mathbf{A}$ korrutamisel skalaariga a saadakse uus vektor $\mathbf{B}$, mille moodul on $|a|$ korda suurem vektori $\mathbf{A}$ moodulist, suund aga ühtib vektori $\mathbf{A}$ suunaga, kui skalaar a on positiivne, ning on sellega vastupidine, kui skalaar a on negatiivne. Kui $\mathbf{B}=a\mathbf{A}$, siis $B=|a|A$.

Vektori jagamine skalaariga b on samaväärne vektori korrutamisega skalaariga $a=1/b$.

Ühikvektor. Igale vektorile $\mathbf{A}$ võib seada vastavusse ühikvektori $\mathbf{A}_{\ddot{u}hik}$, mille suund ühtib vektori $\mathbf{A}$ suunaga ning moodul on võrdne ühega. Ilmselt kehtivad siis seosed:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= A\cdot\mathbf{A}_{\ddot{u}hik}, \\ \mathbf{A}_{\ddot{u}hik} &= \frac{\mathbf{A}}{A}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

Ühikvektorit nimetatakse teisiti ordiks. Vektori koordinaatteljeliste komponentide $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ ja $\mathbf{A}_z$ moodulid (vt. joon. 11) on võrdsed selle vektori projektsioonide moodulitega nendel telgedel:

$$|\mathbf{A}_x| = |A_x|,$$
$$|\mathbf{A}_y| = |A_y|,$$
$$|\mathbf{A}_z| = |A_z|.$$

Võtame tarvitusele koordinaattelgedesuunalised ühikvektorid. Neid tähistatakse tavaliselt alljärgnevalt: x-telje suunalist ühikvektorit märgitakse sümboliga $\mathbf{i}$, y-telje suunalist tähega $\mathbf{j}$, z-telje suunalist tähega $\mathbf{k}$.[1] Vektoreid $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ nimetatakse vastavalt telgede x, y ja z ortideks.

Nii võib näiteks komponendi $\mathbf{A}_x$ (vt. joon. 11) kirjutada kujul

$$\mathbf{A}_x = A_x\mathbf{i}. \qquad (2.7)$$

Tõepoolest, vektori $A_x\mathbf{i}$ moodul on $|A_x|$, s. o. $|\mathbf{A}_x|$. Edasi, kui vektor $\mathbf{A}_x$ on teljega x, seega vektoriga $\mathbf{i}$ samasuunaline, siis, nagu näha jooniselt 11, on A_x positiivne; kui aga $\mathbf{A}_x$ on x-teljega, seega vektoriga $\mathbf{i}$ vastassuunaline, osutub A_x negatiivseks, nii et vektori $A_x\mathbf{i}$ suund on vastupidine vektori $\mathbf{i}$ suunaga, järelikult langeb tema suund kokku vektori $\mathbf{A}_x$ suunaga.

Ülejäänud kahe komponendi $\mathbf{A}_y$ ja $\mathbf{A}_z$ kohta võime kirjutada analoogiliselt valemiga (2.7)

$$\mathbf{A}_y = A_y\mathbf{j}, \quad \mathbf{A}_z = A_z\mathbf{k}.$$

Et vektor $\mathbf{A}$ on oma komponentide summa, siis

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}. \qquad (2.8)$$

Nii saab iga vektori avaldada tema projektsioonide kaudu koordinaattelgedel ja nende telgede ühikvektorite abil.

Vektori tuletis. Oletame, et vektor (2.8) muutub ajas teatava seaduse $\mathbf{A}(t)$ järgi. Seega on ka selle vektori projektsioonid koordinaattelgedel kindlad funktsioonid ajast t:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{i}A_x(t) + \mathbf{j}A_y(t) + \mathbf{k}A_z(t)$$

[1] Kasutatakse ka tähistusi $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$.

(kui koordinaatteljed ei pöördu ruumis, ei muutu ajas ka nende ühikvektorid).

Olgu ajavahemikule Δt vastavad vektori projektsioonide juurdekasvud ΔA_x, ΔA_y, ΔA_z, mistõttu vektori enese juurdekasv $\Delta \mathbf{A} = \mathbf{i}\Delta A_x + \mathbf{j}\Delta A_y + \mathbf{k}\Delta A_z$. Vektori $\mathbf{A}$ muutumise kiirust iseloomustab suhe

$$\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \mathbf{i}\frac{\Delta A_x}{\Delta t} + \mathbf{j}\frac{\Delta A_y}{\Delta t} + \mathbf{k}\frac{\Delta A_z}{\Delta t}. \tag{2.9}$$

See suhe määrab vektori $\mathbf{A}$ muutumise keskmise kiiruse ajavahemikus Δt. Muutugu $\mathbf{A}$ ajas pidevalt, ilma hüpeteta. Mida lühem on ajavahemik Δt, seda täpsemalt iseloomustab avaldis (2.9) $\mathbf{A}$ muutumise kiirust ajavahemikku Δt kuuluvatel suvalistel ajahetkedel. Järelikult on vektori $\mathbf{A}$ muutumise kiirus ajahetkel t võrdne avaldise (2.9) piirväärtusega, mille saame Δt piiramatul vähendamisel:

$$\mathbf{A}\text{ muutumise kiirus} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \mathbf{i}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta A_x}{\Delta t} + \mathbf{j}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta A_y}{\Delta t} + \mathbf{k}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta A_x}{\Delta t}.$$

Funktsiooni juurdekasvu Δf ja argumendi juurdekasvu Δt suhte piirväärtus, mis saadakse argumendi juurdekasvu Δt lähenemisel nullile, on funktsiooni f tuletis argumendi t järgi ning seda tähistatakse sümboliga $\frac{df}{dt}$. Järelikult on vektori A muutumiskiirus ajas võrdne

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{i}\frac{dA_x}{dt} + \mathbf{j}\frac{dA_y}{dt} + \mathbf{k}\frac{dA_z}{dt}. \tag{2.10}$$

Kõrvutades saadud avaldist valemiga (2.8), näeme, et ühikvektorite tegurid avaldises (2.10) on vektori $\frac{dA}{dt}$ projektsioonid koordinaattelgedel:

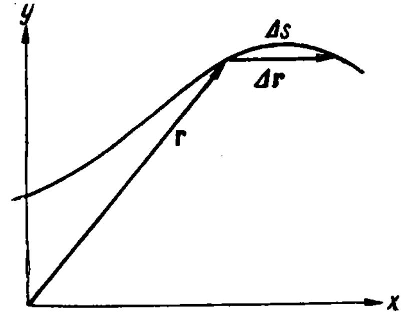
$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{x\,pr} &= \frac{dA_x}{dt}, \\ \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{y\,pr} &= \frac{dA_y}{dt}, \\ \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{z\,pr} &= \frac{dA_z}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

Tähistamisel peab olema väga tähelepanelik. Nii näiteks vektori $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ projektsiooni x-teljel ei saa tähistada $\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_x$, sest

niisugune sümbol tähendaks analoogiliselt $\mathbf{A}_x$-ga vektori $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ x-telje suunalist komponenti. Samuti ei saa seda projektsiooni tähistada sümboliga $\left(\frac{dA}{dt}\right)_x$ (nii nagu vektori $\mathbf{A}$ projektsiooni tähistasime sümboliga A_x), sest üldjuhul $\left|\frac{dA}{dt}\right|$ erineb $\left|\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|$-st. Seepärast peabki kasutama tähistust $\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{x\,pr}$ jne.

§ 3. KIIRUS

Nimetame ainepunkti edaspidi lühiduse mõttes lihsalt punktiks. Tema asukoha ruumis saab määrata raadiusvektori $\mathbf{r}$ abil. Punkti liikumisel muutub vektor $\mathbf{r}$ üldjuhul nii suuruse kui ka suuna poolest.[1]



Joon. 16

Fikseerime mingi ajahetke t, millele vastab raadiusvektori väärtus $\mathbf{r}$ (joon. 16).

Ajahetkele t järgneva väikese ajavahemiku, nn. elementaaraja Δt jooksul läbib punkt elementaarse teelõigu Δs ning saab elementaarnihke $\Delta \mathbf{r}$, mis langeb kokku raadiusvektori juurdekasvuga ajavahemikus Δt.[2]

Moodustame suhte

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \tag{3.1}$$

Antud t puhul sõltuvad vektori (3.1) moodul ja suund üldjuhul ajavahemiku Δt suurusest. Hakkame vähendama ajavahemikku Δt (vastavalt vähenevad siis ka Δs ja $\Delta \mathbf{r}$), jälgides seejuures suhte (3.1) muutumist. Selgub, et küllalt väikeste Δt väärtuste juures vektor (3.1) praktiliselt enam ei muutu ei suuruse ega ka suuna poolest. See tähendab, et Δt nullile lähenemisel läheneb suhe (3.1) teatud piirväärtusele, mida nimetatakse lii-

[1] Harjutamise mõttes on soovitatav tuua näiteid trajektooridest, kus punkti raadiusvektor muutub: a) ainult suuruse poolest, b) ainult suuna poolest.

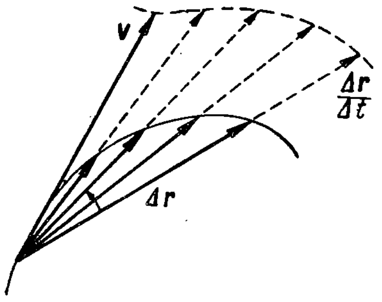
[2] Sümbolit Δ (delta) kasutame kahel juhul: a) mingi suuruse osa tähistamiseks. Näiteks antud juhul on Δt osa kogu ajast, mille kestel toimub liikumine, Δs — osa kogu teest, mille punkt läbib;
b) mingi suuruse juurdekasvu tähistamiseks. Antud juhul on $\Delta \mathbf{r}$ raadiusvektori $\mathbf{r}$ juurdekasv ajavahemikus Δt.

kuva punkti kiiruseks **v** ajahetkel t. Sümboolselt kirjutatakse seda niimoodi:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{3.2}$$

Niisiis, kiirus on piir, millele läheneb $\Delta \mathbf{r}$ ja Δt suhe Δt piiramatul kahanemisel. Järelikult võib määrata kiirust kui liikuva punkti raadiusvektori tuletist aja järgi:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{3.3}$$



Joon. 17

Nagu järeldub definitsioonist on kiirus vektoriline suurus. Jooniselt 17 näeme, et vektor $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ on trajektoori lõikaja. Üleminekul piirile (3.2) lähenevad selle vektori ja trajektoori lõikepunktid üksteisele (Δs läheneb nullile), kuni langevad lõpuks kokku, nii et lõikaja saab puutujaks. Seega on kiirusvektor igas trajektoori punktis suunatud mööda trajektoori puutujat selles punktis (joon. 18).

Vastavalt valemile (3.2) võib kiirusvektori mooduli avaldada kujul

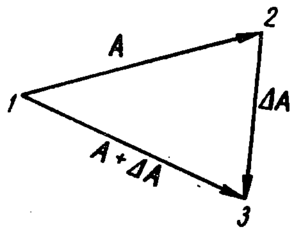
$$v = |\mathbf{v}| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}. \tag{3.4}$$

Selles avaldises ei tohi $|\Delta \mathbf{r}|$ asemele kirjutada Δr. Sümbol $|\Delta \mathbf{r}|$ tähistab vektori **r** juurdekasvu moodulit, Δr aga on vektori **r** mooduli juurdekasv: $\Delta |\mathbf{r}|$. Need suurused ei ole võrdsed:

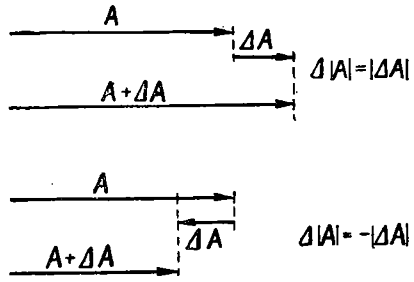
$$|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta |\mathbf{r}| = \Delta r.$$

Selles on võimalik veenduda järgmise näite varal (joon. 19).

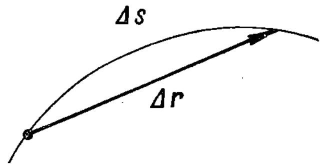
Joon. 18



Joon. 19



Joon. 20



Joon. 21

Saagu mingi vektor **A** niisuguse juurdekasvu $\Delta \mathbf{A}$, et tema moodul ei muutu:

$$|\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}| = |\mathbf{A}|.$$

Järelikult on vektori **A** mooduli juurdekasv null ($\Delta |\mathbf{A}| = \Delta A = 0$). Samal ajal vekotri **A** juurdekasvu moodul $|\Delta \mathbf{A}|$ erineb nullist (ta on võrdne lõigu *2—3* pikkusega).

Jooniselt 20 näeme, et antud $|\Delta \mathbf{A}|$ korral võib mooduli juurdekasv $\Delta |\mathbf{A}|$ omada väärtusi vahemikus $-|\Delta \mathbf{A}|$ kuni $+|\Delta \mathbf{A}|$.

Elementaarne teelõik Δs on üldjuhul suuruse poolest erinev elementaarnihke moodulist $|\Delta \mathbf{r}|$ (joon. 21). Kui aga vaadelda väikestele ajavahemikele Δt vastavaid teelõike Δs ja nihkeid $\Delta \mathbf{r}$, siis Δs ja $|\Delta \mathbf{r}|$ erinevad vähe, kusjuures Δt vähenedes Δs ja $|\Delta \mathbf{r}|$ kokkulangemise täpsus üha kasvab. Selle põhjal võime kirjutada, et

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

millest, arvestades seost (3.4), saame kiiruse mooduli jaoks järgmise valemi:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \tag{3.5}$$

§ 4. LÄBITUD TEE PIKKUSE ARVUTAMINE

Avaldisest (3.5) järeldub, et väikeste ajavahemike Δt korral

$$v \cong \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{4.1}$$

Viimane ligikaudne võrdus on seda täpsem, mida väiksem on Δt. Kui on teada kiiruse v sõltuvus ajast t, saab arvutada tee pikkuse, mille punkt on läbinud ajahetkest t_1 ajahetkeni t_2. Selleks jagame ajavahemiku $t_2 - t_1$ N väikeseks vahemikuks $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_N$, mis üldjuhul võivad olla erinevad. Kogu läbitud teed s võib kujutada nüüd nendes ajavahemikes läbitud lõikude $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_N$ summana:

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_N = \sum_{i=1}^{N} \Delta s_i{}^1.$$

Vastavalt avaldisele (4.1) võib iga liikme Δs_i (i on mistahes arv 1 kuni N) avaldada kujul

$$\Delta s_i \cong v_i \Delta t_i,$$

kus Δt_i on ajavahemik, mille kestel läbiti teelõik Δs_i, v_i aga üks ajavahemikus Δt_i esinenud kiiruse väärtusi.

Seega,

$$s \cong \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i. \tag{4.2}$$

Viimane võrrand on seda täpsem, mida lühem on ajavahemik Δt_i. Piirjuhul, kui kõik Δt_i lähenevad nullile (ajavahemike Δt_i arv kasvab piiramatult), saab paremal pool võrdusmärki esinev summa täpselt võrdseks s-ga:

$$s = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i. \tag{4.3}$$

Kiirus on aja funktsioon: $v = v(t)$. Avaldist

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \Delta x_i,$$

milles x väärtused asuvad a ja b vahel, nimetatakse määratud integraaliks ning seda märgitakse sümboliga

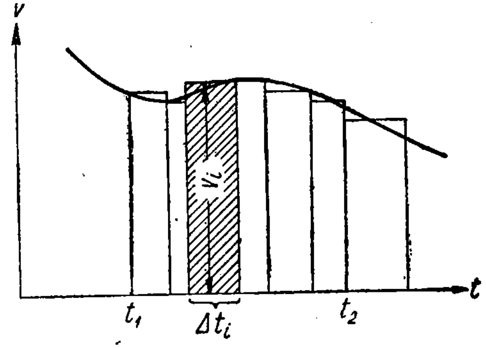
$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Järelikult on punkt ajavahemikus t_1 kuni t_2 läbinud tee, mille pikkus avaldub integraaliga

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt. \tag{4.4}$$

Näitame, et läbitud tee pikkuse võib esitada kui pindala, mille piirab kiiruse v sõltuvust ajast t kujutav kõver. Joonestame funktsiooni $v = v(t)$ graafiku (joon. 22). Korrutis $v_i \Delta t_i$ on arvuliselt võrdne viirutatud (i-nda) riba pindalaga. Niisuguste korrutiste summa on võrdne pindalaga, mille piiravad t-telg, sirged $t = t_1$

[1] Nii märgitakse lühidalt N sama liiki liidetava summat.



Joon. 22

ja $t = t_2$ ning kõikide ribade ülemistest servadest moodustatud murdjoon. Δt_i lähenedes nullile kahaneb iga riba laius (ribade arv samal ajal kasvab) ning murdjoonest kujuneb piiril kõver $v(t)$.

Seega on ajahetkest t_1 ajahetkeni t_2 läbitud tee arvuliselt võrdne graafikust $v(t)$, ajateljest t ning sirgetest $t = t_1$ ja $t = t_2$ piiratud kujundi pindalaga.

§ 5. ÜHTLANE LIIKUMINE

Liikumist, mille kiiruse suurus ei muutu, ehkki suund võib muutuda, nimetatakse ühtlaseks.

Ühtlasel liikumisel on kõik v_i valemis (4.3) ühesugused ning võrdsed v. Ühise teguri v võime tuua summamärgi ette:

$$s = \lim_{\Delta t_i \to 0} v \sum \Delta t_i = v \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum \Delta t_i.$$

Elementaarsete ajavahemike summa annab aja t, mille kestel on läbitud tee s.[1] Seega võib kirjutada:

$$s = vt. \tag{5.1}$$

Valemist (5.1) järeldub, et ühtlasel liikumisel on kiirus võrdne teepikkuse s ning selle läbimiseks kulunud aja t jagatisega:

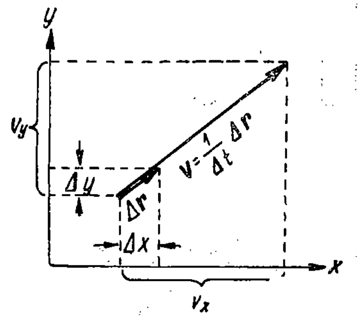
$$v = \frac{s}{t}. \tag{5.2}$$

Valemi (5.2) alusel võib öelda, et ühtlasel liikumisel on kiirus suuruse poolest võrdne ajaühikus läbitud tee pikkusega. Ebaühtlasel liikumisel niisugune väide paika ei pea. Sel juhul võib

[1] Tähte t võib kasutada nii ajavahemiku tähistamiseks, nagu on tehtud käesoleval juhul, kui ka ajahetke märkimiseks, nii nagu seda tehti § 3 alguses. Nimetatud kahte juhtu peab rangelt eristama.

öelda, et kiiruse suurus antud hetkel t on võrdne tee pikkusega, mille läbiks punkt ajaühikus, kui ta edaspidisel liikumisel säilitaks selle kiiruse, mis tal oli ajahetkel t.

§ 6. KIIRUSVEKTORI PROJEKTSIOONID KOORDINAATTELGEDEL



Joon. 23

Kiirust defineerivas valemis (3.2) seisab piirväärtuse *lim* märgi all vektor $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$. Võttes avaldises (3.2) selle vektori asemel tema projektsiooni mingil suunal, saame ilmselt vektori $\mathbf{v}$ projektsiooni samal suunal:

$$\mathbf{v}_{pr}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta \mathbf{r})_{pr}}{\Delta t}. \qquad (6.1)$$

Nagu näha joonisel 23, on vektori $\Delta \mathbf{r}$ projektsioonid koordinaattelgedel võrdsed liikuva punkti vastavate koordinaatide juurdekasvudega:

$$(\Delta \mathbf{r})_x=\Delta x;$$
$$(\Delta \mathbf{r})_y=\Delta y;$$
$$(\Delta \mathbf{r})_z=\Delta z.$$

Teinud need asendused valemis (6.1), saame kiirusvektori projektsioonid koordinaattelgedel:

$$v_x=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta \mathbf{r})_x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt};$$
$$v_y=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta \mathbf{r})_y}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{dy}{dt};$$
$$v_z=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta \mathbf{r})_z}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{dz}{dt}.$$

Füüsikas on kombeks tähistada suuruste tuletisi aja järgi punktiga vastava suuruse sümboli kohal, näiteks:

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x};\quad \frac{dr}{dt}=\dot{r};\quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}=\dot{\mathbf{r}}\quad \text{jne.}$$

Kasutades sellist tähistusviisi, võib kiirusvektori projektsioonid koordinaattelgedel kirjutada järgmisel kujul:

$$v_x=\dot{x};\quad v_y=\dot{y};\quad v_z=\dot{z}. \qquad (6.2)$$

Paneme tähele, et valemid (6.2) saame tuletada valemitest (2.11), võttes nendes $\mathbf{A}=\mathbf{r}$.

§ 7. KIIRENDUS

Nagu öeldud § 2, iseloomustab punkti liikumise kiiruse $\mathbf{v}$ muutumist ajas t suurus

$$\mathbf{w}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \qquad (7.1)$$

Seda nimetatakse punkti kiirenduseks.

Kui on teada kiirendus aja funktsioonina $\mathbf{w}(t)$ ning kiirus $\mathbf{v}_0$ alghetkel $t=0$, saab määrata kiiruse $\mathbf{v}$ suvalisel ajahetkel t. Seda tehakse valemi

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\int_0^t \mathbf{w}\,dt$$

järgi.

Juhul kui $\mathbf{w}$ on muutumatu, on kiirus

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{w}t. \qquad (7.2)$$

Esitame kiirusvektori kujul (vt. (6.2)):

$$v=\mathbf{i}v_x+\mathbf{j}v_y+\mathbf{k}v_z=\mathbf{i}\dot{x}+\mathbf{j}\dot{y}+\mathbf{k}\dot{z}.$$

Diferentseerinud selle avaldise aja t järgi, saame

$$\mathbf{w}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{i}\frac{d}{dt}(\dot{x})+\mathbf{j}\frac{d}{dt}(\dot{y})+\mathbf{k}\frac{d}{dt}(\dot{z}).$$

Kuid $\frac{d}{dt}(\dot{x})$ on x teine tuletis aja t järgi, mille võime tähistada sümboliga $\ddot{x}$. Analoogiliselt

$$\frac{d}{dt}(\dot{y})=\ddot{y},\quad \frac{d}{dt}(\dot{z})=\ddot{z}.$$

Järelikult,

$$\mathbf{w}=\mathbf{i}\ddot{x}+\mathbf{j}\ddot{y}+\mathbf{k}\ddot{z}. \qquad (7.3)$$

Kõrvutades viimast seost valemiga (2.8), on kerge leida avaldised kiirendusvektori projektsioonide jaoks koordinaattelgedel:

$$w_x=\ddot{x};\quad w_y=\ddot{y};\quad w_z=\ddot{z}. \qquad (7.4)$$

§ 8. ÜHTLASELT MUUTUV SIRGLIIKUMINE

Sirgliikumisel on kiirusvektor suunatud alati ühte ja sama sirget — trajektoori mööda, mistõttu vektori $\mathbf{w}$ suund kas ühtib vektori $\mathbf{v}$ suunaga või on sellega vastupidine. Kui vektorite $\mathbf{w}$ ja $\mathbf{v}$ suunad ühtivad, siis kiiruse suurus kasvab ning liikumine on kiirenev. Kui vektor $\mathbf{w}$ on vastassuunaline kiirusvektoriga $\mathbf{v}$, siis kiiruse suurus kahaneb ning liikumine on aeglustuv.

Muutumatu kiirenduse korral nimetatakse sirgliikumist ühtlaselt muutuvaks. Olenevalt kiiruse muutumise iseloomust eristatakse ühtlaselt kiirenevat ja ühtlaselt aeglustuvat liikumist.

Ühtlaselt muutuva liikumise korral kehtib valem (7.2), kusjuures kõik selles valemis esinevad vektorid $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_0$ ja $\mathbf{w}$ on suunatud mööda sama sirget. Projitseerinud need vektorid vektori $\mathbf{v}_0$ suunaga ühtivale suunale x, saame

$$v_x = v_{0x} + w_x t. \tag{8.1}$$

Projektsioonid v_x, v_{0x} ja w_x on võrdsed vastavate vektorite moodulitega, mis võetakse plussmärgiga, kui vektori suund ühtib x suunaga, ning miinusmärgiga, kui vektori suund on x suunaga vastupidine.

Tavaliselt jäetakse sirgliikumise kirjeldamisel valemis (8.1) indeksid x ära ning kirjutatakse lihtsalt

$$v = v_0 + wt, \tag{8.2}$$

käsitades valemis (8.2) esinevaid suurusi kui vektorite projektsioone. Seejuures kasutatakse mitte päris korrektset, kuid üldlevinud terminoloogiat, nimetades näiteks w-d kiirenduseks ning arvestades, et kiirendus on kas positiivne või negatiivne vastavalt sellele, milline on w_x märk. Integreerides funktsiooni (8.2) rajades nullist mingi suvalise ajahetkeni t, saame valemi läbitud tee pikkuse arvutamiseks (vt. (4.4)):

$$s = \int_0^t (v_0 + wt)\,dt = v_0 t + \frac{wt^2}{2}, \tag{8.3}$$

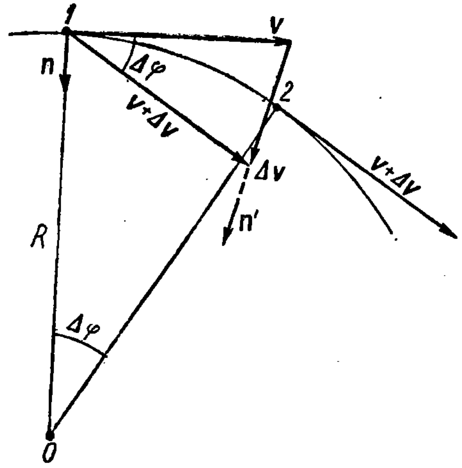
kus w on algebraline suurus.

Paneme tähele, et see valem annab õige läbitud tee pikkuse ainult niisugusel juhul, kui punkti liikumise suund (kiiruse märk) aja t jooksul ei muutu.

§ 9. KIIRENDUS KÕVERJOONELISEL LIIKUMISEL

Enne kui asuda kiirendust üldjuhul määrama, vaatleme kõverjoonelise liikumise lihtsaimat juhtu — punkti ühtlast liikumist mööda ringjoont.

Olgu *1* punkti asukoht vaadeldaval hetkel t (joon. 24). Aja Δt möödudes on punkt asukohas *2*, läbinud kaarega *1—2* võrdse tee Δs. Kiirus $\mathbf{v}$ on saanud seejuures juurdekasvu $\Delta\mathbf{v}$, mille tulemusena suuruse poolest muutumatuks jäänud kiirusvektor (ühtlasel liikumisel $|\mathbf{v}| = \text{const}$) on pöördunud nurga $\Delta\varphi$ võrra. See pöördenurk $\Delta\varphi$ on võrdne kaarele Δs toetuva kesknurgaga:



Joon. 24

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}, \tag{9.1}$$

kus R on punkti trajektoori, s. t. ringjoone raadius.

Leiame kiirusvektori juurdekasvu $\Delta\mathbf{v}$. Selleks kanname vektori $(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})$ üle nii, et tema algus ühtiks vektori $\mathbf{v}$ algusega. Siis kujutab vektorit $\Delta\mathbf{v}$ vektori $\mathbf{v}$ otspunktist vektori $(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})$ otspunkti tõmmatud lõik. See lõik kujutab endast võrdhaarse kolmnurga alust, kolmnurga haaradeks on $\mathbf{v}$ ja $(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})$ ning tipunurgaks $\Delta\varphi$. Kui nurk $\Delta\varphi$ on küllalt väike (see vastab küllalt väikestele ajavahemikele Δt), siis kehtib selle kolmnurga külgede kohta järgmine ligikaudne seos:

$$|\Delta\mathbf{v}| \cong v\Delta\varphi.\text{[1]}$$

Vektorit $\Delta\mathbf{v}$ võib kujutada kui tema mooduli korrutist $\Delta\mathbf{v}$ suunalise ühikvektoriga. Tähistame selle ühikvektori $\mathbf{n}'$. Siis

$$\Delta\mathbf{v} = |\Delta\mathbf{v}|\,\mathbf{n}' \cong v\Delta\varphi\,\mathbf{n}'.$$

Asendanud $\Delta\varphi$ valemist (9.1), saame:

$$\Delta\mathbf{v} \cong v\frac{\Delta s}{R}\mathbf{n}'. \tag{9.2}$$

Jaganud $\Delta\mathbf{v}$ ajavahemikuga Δt ning läinud üle piirile, saame kiirenduse

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v\Delta s}{R\Delta t}\mathbf{n}'.$$

[1] Ei tohi kirjutada Δv. Antud juhul $\Delta v = 0$.

Selles avaldises on v ja R konstantsed; suhe $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ annab piirväärtusena kiiruse mooduli v; ühikvektor $\mathbf{n}'$ ühtib piirasendis ringjoone punktist 1 ringjoone tsentrisse suunatud normaali ühikvektoriga $\mathbf{n}$. Seega,

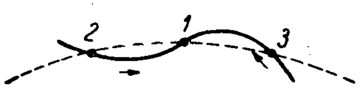
$$\mathbf{w}_n=\frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \tag{9.3}$$

Leitud kiirendus on suunatud mööda trajektoori normaali; teda nimetatakse **normaalkiirenduseks** ning tähistatakse $\mathbf{w}_n$, nagu seda on tehtud juba avaldises (9.3). Normaalkiirenduse moodul

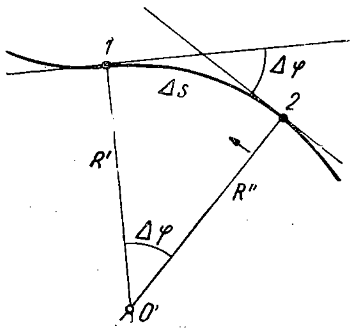
$$w_n=\frac{v^2}{R}. \tag{9.4}$$

Mida kõveram on trajektoor, s. t. mida väiksem on ringjoone raadius R, seda suurem on sama kiiruse korral w_n. Kõveruse mõõduks võetakse suurus $1/R$, mida nimetatakse ringjoone **kõveruseks**.

Ilmselt sõltub suvalist kõverat mööda liikuva punkti kiirendus trajektoori kõverusest, mis on eri punktides erinev. Edaspidi piirdume lihtsuse mõttes ainult tasapinnaliste kõverate vaatlemisega. Tasapinnalise joone kõverus suvalises punktis on võrdne antud joone lõpmata väikese lõiguga ühtiva ringjoone kõverusega. Sellist ringjoont nimetatakse tasapinnalise joone **kõverusringjooneks** antud punktis. Kõverusringjoone leidmiseks punktis 1 (joon. 25) tuleb toimida alljärgnevalt. Võtame kõveral kaks punktile 1 küllalt lähedast punkti 2 ja 3. Tõmbame läbi punktide 1, 2 ja 3 ringjoone. Selle ringjoone piirasend punktide 2 ja 3 piiramatul lähenemisel punktile 1 ongi kõverusringjoon. Viimase raadius määrab joone kõveruse punktis 1, tema keskpunkt aga kõverustsentri ehk kõveruskeskpunkti sama punkti 1 jaoks.



Joon. 25



Joon. 26

Analüütiliselt väljendub joone kõverus C avaldisega

$$C=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{d\varphi}{ds},$$

kus $\Delta\varphi$ on nurk, mille moodustavad kõvera puutujad punktide vahekaugustega Δs (joon. 26). Seega iseloomustab kõverust joone suuna muutumise kiirus, s. o. puutuja pöördumise kiirus puutepunkti nihkudes mööda joont. Kõveruse C pöördväärtus on võrdne kõverusraadiusega R. On lihtne veenduda, et ringjoone puhul ühtib selliselt määratud kõverusraadius ringjoone raadiusega.

Pöördume uuesti joonise 26 juurde. Joonestame ristsirged puutujatele punktides 1 ja 2. Need ristsirged lõikuvad mingis punktis O', kusjuures R' ja R'' on üldjuhul erineva pikkusega. Moodustame suhte $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$. Suurus Δs on ligikaudu võrdne avaldisega $R'\Delta\varphi$. Teeme asenduse. Siis

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{1}{R'}.$$

Viimane ligikaudne võrdus kehtib seda täpsemalt, mida lähemal on teineteisele punktid 1 ja 2, s. o. mida väiksem on Δs. Lastes Δs läheneda nullile, saame kõveruse:

$$C=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{R'}.$$

Kui lähendada punkti 2 piiramatult punktile 1, siis ristsirgete lõikepunkt O' läheneb punktile, millest saab kõverustsenter. Mõlemad lõigud R' ja R'' lähenevad samale piirväärtusele R, mis on võrdne kõverusraadiusega. R pöördväärtus annab joone kõveruse punktis 1.

Nüüd leiame mööda suvalist tasapinnalist kõverat liikuva punkti kiirenduse. Lahutame kiiruse juurdekasvu vektori $\Delta\mathbf{v}$ (vastab ajavahemikule Δt, mille jooksul punkt nihkub asendist 1 asendisse 2) kaheks komponendiks: $\Delta\mathbf{v}_n$ ja $\Delta\mathbf{v}_\tau$ (joon. 27). Need komponendid valime nii, et kaugus punktist 1 kuni vektori $\Delta\mathbf{v}_n$ otspunktini oleks võrdne kiiruse $\mathbf{v}$ mooduliga alghetkel. Siis on vektori $\Delta\mathbf{v}_\tau$ moodul ilmselt võrdne kiiruse mooduli juurdekasvuga:

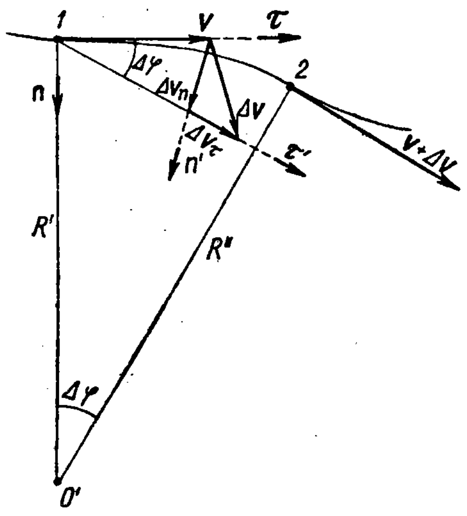
$$|\Delta\mathbf{v}_\tau|=\Delta|\mathbf{v}|=\Delta v.$$

Toonud sisse ühikvektori τ', mis ühtib suuna poolest vektoriga $\Delta\mathbf{v}_\tau$, võime viimase avaldada järgmisel kujul:

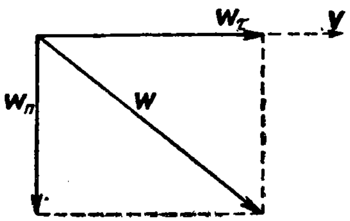
$$\Delta\mathbf{v}_\tau=\Delta v\tau'. \tag{9.5}$$

Korrates valemi (9.4) tuletamise mõttekäiku, saame

$$\Delta\mathbf{v}_n=v\frac{\Delta s}{R'}\mathbf{n}'. \tag{9.6}$$



Joon. 27



Joon. 28

Kogukiirenduse vektor on definitsiooni kohaselt võrdne

$$\mathbf{w}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}_n+\Delta\mathbf{v}_\tau}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}_n}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}_\tau}{\Delta t}.$$

Arvestades seost (9.6), saame

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}_n}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{R'}\frac{\Delta s}{\Delta t}\mathbf{n}'.$$

Piirväärtusena annab $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ kiiruse mooduli v, R' kõverusraadiuse R, vektor $\mathbf{n}'$ aga ühtib trajektoori punktist *1* tõmmatud normaali ühikvektoriga $\mathbf{n}$. Tähistame selle piiri $\mathbf{w}_n$:

$$\mathbf{w}_n=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}_n}{\Delta t}=\frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \qquad (9.7)$$

Teine piir (tähistame selle $\mathbf{w}_\tau$) on seost (9.5) arvestades võrdne

$$\mathbf{w}_\tau=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}_\tau}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\boldsymbol{\tau}'.$$

Üleminekul piirile langeb vektor $\boldsymbol{\tau}'$ ühte ühikvektoriga $\boldsymbol{\tau}$, mis on punktis *1* suunatud mööda trajektoori puutujat *1* liikumise suunas ning samane kiiruse $\mathbf{v}$ ühikvektoriga (vt. (2.6)):

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathbf{v}}{v}.$$

Lõplikult,

$$\mathbf{w}_\tau=\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)\boldsymbol{\tau}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}. \qquad (9.8)$$

Nii saab vektorit $\mathbf{w}$ kujutada kahe vektori $\mathbf{w}_n$ ja $\mathbf{w}_\tau$ summana (joon. 28), millest $\mathbf{w}_n$ on risti kiirusvektoriga $\mathbf{v}$ ning suunatud trajektoori kõverustsentrisse, $\mathbf{w}_\tau$ aga on trajektoori puutuja suunaline. Kui kiiruse suurus kasvab $\left(\frac{dv}{dt}\text{ on positiivne}\right)$, siis $\mathbf{w}_\tau$ on liikumisega samasuunaline, kui aga kiirus suuruse poolest kahaneb $\left(\frac{dv}{dt}\text{ on negatiivne}\right)$, on $\mathbf{w}_\tau$ liikumisega vastassuunaline.

Vektorit $\mathbf{w}_\tau$ nimetatakse **t a n g e n t s i a a l k i i r e n d u s e k s** ja ta iseloomustab kiiruse suuruse muutumist. Kui kiiruse suurus ei muutu, on tangentsiaalkiirendus null ning $\mathbf{w}=\mathbf{w}_n$.

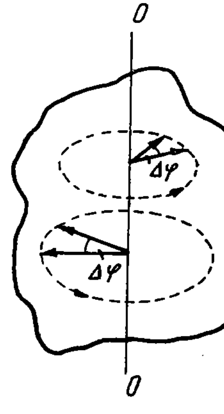
Vektor $\mathbf{w}_n$ (normaalkiirendus) iseloomustab kiiruse suuna muutumist. Kui kiiruse suund ei muutu, toimub liikumine mööda sirgjoonelist trajektoori. Sirge kõverus on null (kõverusraadius R on vastavalt lõpmata suur), järelikult normaalkiirendus on null ning $\mathbf{w}=\mathbf{w}_\tau$.

Üldjuhul on kogukiirenduse moodul (joon. 28):

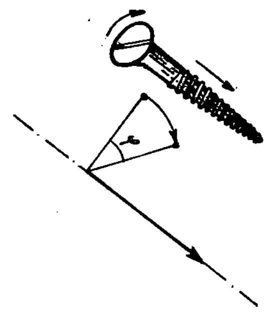
$$w=\sqrt{w_n^2+w_\tau^2}=\sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

§ 10. PÖÖRLEMISE KINEMAATIKA

Ümber mingi telje OO pöörleva absoluutselt jäiga keha kõik punktid (joon. 29) liiguvad mööda ringjooni, mille tsentrid asu-



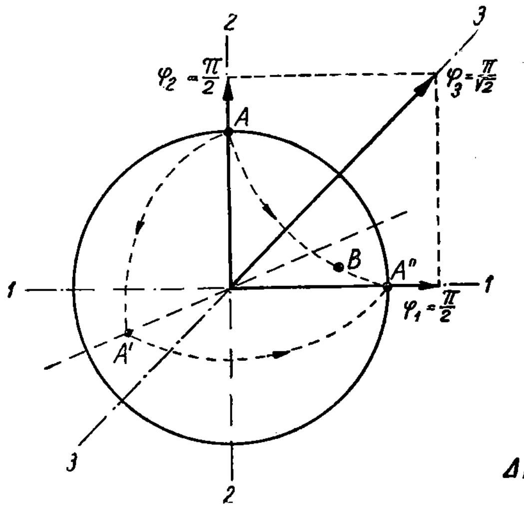
Joon. 29



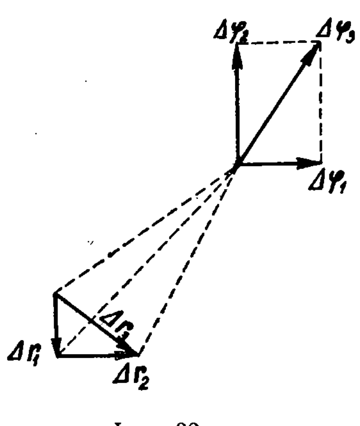
Joon. 30

vad pöörlemisteljel. Iga punkti raadiusvektor (vastava ringjoone tsentrist antud punkti tõmmatud vektor) pöördub ajavahemiku Δt kestel ühesuguse nurga $\Delta\varphi$ võrra, mis on kogu jäiga keha pöördenurgaks.

Keha pööret mingi nurga φ võrra võib kujutada sirglõiguna pikkusega φ; selle lõigu siht ühtib teljega, mille ümber pööre on toimunud. Pöördumise suuna määramiseks võib kasutada nn. parema käe kruvi reeglit, mis seob pöördumise suunda teda kujutava lõigu suunaga pöörlemisteljel. Selle reegli kohaselt peab lõigu suund olema niisugune, et vaadates tema suunas (joon. 30), näeksime pöördumist toimuvat kellaosuti liikumise suunas (pöörates parema käe kruvi kellaosuti suunas, kutsume esile tema nihkumise meist eemale). Nii saab keha pöördele omistada arvväärtuse ja suuna. Kuid ainuüksi selle põhjal ei saa pööret veel vektoriks tunnistada: on tarvis, et nii kujutatavad pöörded liituksid rööpkülikureegli järgi. Suvalise suurusega pöörete korral viimane tingimus ei kehti. Tõestame seda kera pöörlemise näite varal (joon. 31). Kui kera pöördub telje *1—1* ümber nurga $\pi/2$ võrra (see pööre on kujutatud lõiguna φ_1) ning sellele järgneb pööre telje *2—2* ümber nurga $\pi/2$ võrra (lõik φ_2), siis nihkub kera punkt A esialgu asendisse A' ning seejärel asendisse A''. Lõigule φ_3 vastav pööre, kus φ_3 on saadud φ_1 ja φ_2 liitmisel rööpkülikureegli järgi (lõigu φ_3 pikkus on siis $\pi/\sqrt{2}$), viib punkti A asendisse B, mis ei ühti A''-ga. Järelikult lõiguga φ_3 kujutatud pööre ei ole samaväärne kahe teineteise järel teostatud pöördega φ_1 ja φ_2 ega ole seega nende summa. Nii veendusime, et kuigi



Joon. 31

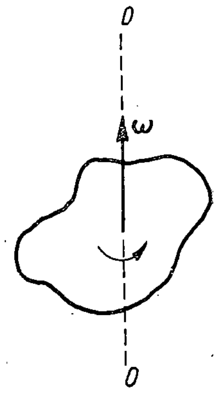


Joon. 32

keha pööret mingi telje ümber võib kujutada suunatud lõiguna, ei saa seda lõiku pidada vektoriks.

Väikeste pöördenurkade $\Delta\varphi$ korral on olukord teistsugune. Väga väikese pöörde korral võib keha iga punkti nihet lugeda sirgeks. Nagu näha jooniselt 32, põhjustavad kaks järjestikust väikest pööret $\Delta\varphi_1$ ja $\Delta\varphi_2$ keha iga punkti korral samasuguse nihke $\Delta\mathbf{r}_1+\Delta\mathbf{r}_2$ nagu pööre $\Delta\varphi_3$, mis saadakse $\Delta\varphi_1$ ja $\Delta\varphi_2$ liitmisel rööpkülikureegli järgi. Siit järeldub, et väga väikesi pöördeid võib vaadelda kui vektoreid (tähistamegi nad $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ või $d\boldsymbol{\varphi}$).

Vektori $d\boldsymbol{\varphi}$ suuna määramiseks sidusime selle teatud viisil keha pöörlemise suunaga. Niisuguste suuruste vaatlemisel, nagu seda on kiirus **v**, kiirendus **w** ja raadiusvektor **r**, ei tekkinud küsimust nende suuna valimisest: see järeldus loomulikul viisil nende suuruste olemusest. Selliseid vektoreid nimetatakse p o l a a r s e t e k s; $d\boldsymbol{\varphi}$ tüüpi vektoreid aga, mille suund on seotud pöörlemise (või ümberkäigu) suunaga, nimetatakse a k s i a a l v e k t o r i t e k s.



Joon. 33

Vektorilist suurust

$$\boldsymbol{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\varphi}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \qquad (10.1)$$

(Δt on aeg, mille kestel sooritatakse pööre $\Delta\boldsymbol{\varphi}$) nimetatakse keha pöörlemise n u r k k i i r u s e k s.[1] Vektori $\boldsymbol{\omega}$ suund pöörlemisteljel on määratud parema käe kruvi reegliga (joon. 33) ning vektor $\boldsymbol{\omega}$ on aksiaalvektor.

Nurkkiiruse vektori moodul on võrdne $\frac{d\varphi}{dt}$.

Jääva nurkkiiruse korral nimetatakse pöörlemist ühtlaseks, sel juhul $\omega=\varphi/t$. Seega näitab nurkkiirus ω ühtlase pöörlemise korral nurka, mille võrra keha ajaühiku jooksul pöördub.

Ühtlast pöörlemist võib iseloomustada pöörlemisperioodiga T, mõistes selle all aega, mille kestel keha teeb ühe täispöörde, s. o. pöördub nurga 2π võrra. Kuna ajavahemikule $\Delta t=T$ vastab pöördenurk $\Delta\varphi=2\pi$, siis

$$\omega=\frac{2\pi}{T}, \qquad (10.2)$$

kust

$$T=\frac{2\pi}{\omega}. \qquad (10.3)$$

Täispöörete arv ajaühikus

[1] Et teha vahet varem vaadeldud kiiruse **v** ja nurkkiiruse vahel, nimetatakse esimest joonkiiruseks. Edaspidi jätame juhtudel, kus see ei peaks segadust tekitama, liite «joon-» ära.

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}. \qquad (10.4)$$

Valemist (10.4) järeldub, et nurkkiirus on võrdne ajaühikus toimuva pöörete arvu 2π-kordsega;

$$\omega=2\pi\nu. \qquad (10.5)$$

Pöörlemisperiooodi ja ajaühikus sooritatavate täispöörete arvu mõisted võib säilitada ka mitteühtlase pöörlemise puhul, mõistes suuruse T hetkväärtuse all aega, mille kestel keha sooritaks ühe täispöörde, kui ta pöörleks ühtlaselt antud hetkele vastava nurkkiirusega, ning suuruse ν hetkväärtuse all täispöörete arvu, mis keha sooritaks ajaühikus samades tingimustes.

Vektor $\boldsymbol{\omega}$ võib muutuda nii pöörlemiskiiruse muutumise tõttu (sel juhul muutub ta suuruse poolest) kui ka telje pöördumisel ruumis (muutub $\boldsymbol{\omega}$ suund). Saagu vektor $\boldsymbol{\omega}$ ajavahemikus Δt juurdekasvu $\Delta\boldsymbol{\omega}$. Nurkkiiruse vektori muutumist ajas iseloomustab suurus

$$\boldsymbol{\beta}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \qquad (10.6)$$

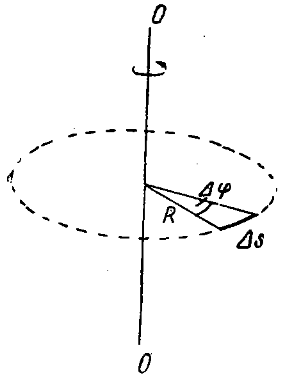
mida nimetatakse n u r k k i i r e n d u s e k s. Vektor $\boldsymbol{\beta}$, samuti kui $\boldsymbol{\omega}$, on aksiaalvektor.

Kui pöörlemistelg säilitab oma asendi ruumis, muutub nurkkiirus ainult suuruse poolest ning $|\Delta\boldsymbol{\omega}|=|\Delta\omega|$. Sel juhul tuleneb valemist (10.6) nurkkiirenduse mooduli jaoks järgmine avaldis:

$$\beta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{\omega}|}{\Delta t}=\left|\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right|. \qquad (10.7)$$

Kui mõista β all vektori $\boldsymbol{\beta}$ projektsiooni $\boldsymbol{\omega}$ sihil, siis võtab valem (10.7) kuju

$$\beta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}. \qquad (10.8)$$



Joon. 34

Valemis (10.8) on β algebraline suurus, mis on positiivne, kui ω kasvab ajas (sel juhul on vektorid $\boldsymbol{\beta}$ ja $\boldsymbol{\omega}$ samasuunalised), ja negatiivne, kui ω kahaneb (vektorid $\boldsymbol{\beta}$ ja $\boldsymbol{\omega}$ on vastassuunalised).

Pöörleva keha eri punktidel on erinevad joonkiirused **v**. Iga punkti kiirus on suunatud mööda vastava ringjoone puutujat ja tema suund muutub pidevalt. Kiiruse suuruse v määravad keha pöörlemise kiirus ω ja antud punkti kaugus R pöörlemisteljest. Olgu väikese ajavahemiku Δt jooksul keha pöördunud nurga $\Delta\varphi$

võrra (joon. 34). Punkt, mille kaugus pöörlemisteljest on R, läbib selle aja vältel tee

$$\Delta s=R\Delta\varphi.$$

Punkti joonkiirus on selle definitsiooni kohaselt

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}R\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=R\frac{d\varphi}{dt}=R\omega,$$

seega

$$v=\omega R. \qquad (10.9)$$

Niisiis, mida kaugemal asub punkt pöörlemisteljest, seda suurem on tema liikumise joonkiirus.

Määrame pöörleva keha punktide joonkiirenduse. Normaalkiirendus valemi (9.4) kohaselt on

$$w_n=\frac{v^2}{R}.$$

Asendanud v avaldisest (10.9), saame

$$w_n=\omega^2R. \qquad (10.10)$$

Vastavalt valemile (9.8) on tangentsiaalkiirenduse moodul $\left|\frac{dv}{dt}\right|$. Teinud jälle asenduse valemist (10.9), saame

$$w_\tau=\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\right|=\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t}\right|=$$

$$=\left|\lim_{\Delta t\to 0}R\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right|=R\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right|=R\beta,$$

s. o.

$$w_\tau=\beta R. \qquad (10.11)$$

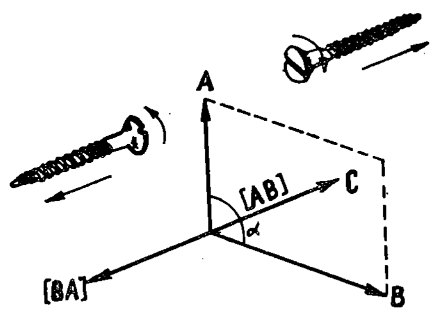
Seega nii normaal- kui ka tangentsiaalkiirendus kasvavad lineaarselt punkti ja pöörlemistelje vahelise kauguse R suurenedes.

§ 11. VEKTORITE v JA ω SEOS

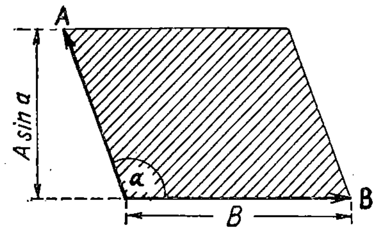
Peale vektorite liitmise ja lahutamise ning vektori korrutamise skalaariga (vt. § 2) on veel vektorite korrutamise operatsioonid. Kahte vektorit võib korrutada kahel viisil: esimene võte annab tulemuseks uue vektori, teine — skalaarse suuruse. Olgu märgitud, et vektorite jagamise operatsioone ei eksisteeri.

Vaatleme nüüd vektorite vektorkorrutist. Vektorite skalaarkorrutist käsitleme siis, kui see osutub vajalikuks.

Kahe vektori **A** ja **B** vektorkorrutiseks nimetatakse vekotrit **C**, millel on järgmised omadused:



Joon. 35



Joon. 36

1) vektori **C** moodul on võrdne korrutatud vektorite moodulite ja nendevahelise nurga α siinuse korrutisega (joon. 35):

$$C=AB\sin\alpha;$$

2) vektor **C** on risti tasapinnaga, milles asuvad vektorid **A** ja **B**, kusjuures tema suund on seotud **A** ja **B** suundadega parema käe kruvi reegliga: kui vaadata vektori **C** suunas, siis väiksem pööre esimeselt tegurilt teisele peab toimuma kellaosuti suunas.

Sümboolselt märgitakse vektorkorrutist kahte moodi:

$$[\mathbf{AB}] \text{ ehk } \mathbf{A}\times\mathbf{B}.$$

Meie kasutame esimest märkimisviisi ning mõnikord selguse mõttes eraldame tegurid komaga. Ei ole lubatud kasutada mõlemat märkimisviisi korraga: $[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]$. Pole õige kirjutada $[\mathbf{AB}]=AB\sin\alpha$. Selles võrduses on vasakul poolel vektor, paremal aga selle vektori moodul, s. o. skalaar. Õige kirjutamisviis on:

$$|[\mathbf{AB}]|=AB\sin\alpha. \tag{11.1}$$

Et vektorkorrutise suund on määratud pöörlemisega esimese teguri poolt teise poole, siis sõltub kahe vektori vektorkorrutamise tulemus tegurite järjekorrast. Tegurite järjekorra muutmine kutsub esile resultantvektori suuna muutumise vastupidiseks (joon. 35).

$$[\mathbf{BA}]=-[\mathbf{AB}]$$

ehk

$$\mathbf{B}\times\mathbf{A}=-(\mathbf{A}\times\mathbf{B}).$$

Seega ei ole vektorkorrutisele omane kommutatiivsus.

On võimalik tõestada, et vektorkorrutis on distributiivne, s. t.

$$[\mathbf{A}, (\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2+\ldots+\mathbf{B}_N)]=[\mathbf{AB}_1]+[\mathbf{AB}_2]+\ldots+[\mathbf{AB}_N]. \tag{11.2}$$

Kahe polaarvektori või kahe aksiaalvektori vektorkorrutis on

aksiaalvektor, aksiaalvektori ja polaarvektori vektorkorrutis aga polaarvektor. Aksiaalvektorite suunda määrava tingimuse muutmine vastupidiseks tingib märgi muutumise vektorkorrutise ees ning samaaegselt märgi muutumise ühe teguri ees. Tulemusena jääb vektorkorrutisena avaldatud suurus muutumatuks.

Vektorkorrutise moodulit saab väga lihtsalt geomeetriliselt interpreteerida: avaldis $AB\sin\alpha$ on arvuliselt võrdne rööpküliku pindalaga, mille külgedeks on vektorid **A** ja **B** (joon. 36; vektor $\mathbf{C}=[\mathbf{AB}]$ on risti joonise tasapinnaga ning suunatud joonise taha).

Olgu vektorid **A** ja **B** omavahel risti (joon. 37). Moodustame nende kahekordse vektorkorrutise:

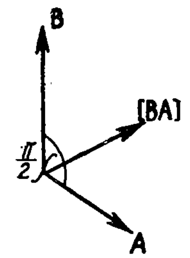
$$\mathbf{D}=[\mathbf{A}, [\mathbf{BA}]],$$

s. o. korrutame vektoriliselt vektorid **B** ja **A** ning seejärel korrutame vektori **A** vektoriliselt esimese korrutamise tulemusega. Vektor $[\mathbf{BA}]$, mille moodul on võrdne BA $\left(\sin\alpha=\sin\frac{\pi}{2}=1\right)$, moodustab vektoritega **A** ja **B** nurgad $\pi/2$. Järelikult on vektori **D** moodul $|\mathbf{A}|\cdot|[\mathbf{BA}]|=A\cdot BA=A^2B$. Vektori **D** suund aga ühtib, nagu näha jooniselt 37, vektori **B** suunaga. See võimaldab meil kirjutada järgmise võrduse:

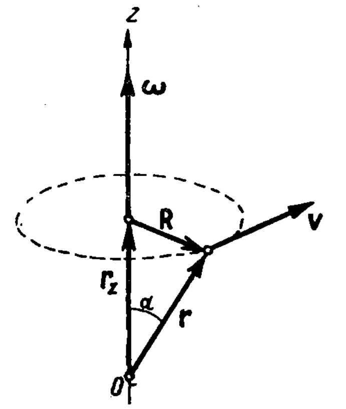
$$[\mathbf{A}, [\mathbf{BA}]]=A^2\mathbf{B}. \tag{11.3}$$

Valemit (11.3) kasutame edaspidi korduvalt. Kriipsutame alla, et see kehtib vaid juhul, kui vektorid **A** ja **B** on omavahel risti.

Võrrand (10.9) määrab seose vektorite **v** ja ω moodulite vahel. Vektorkorrutis võimaldab kirjutada avaldise, mis määrab seose vektorite endi vahel. Pöörelgu keha ümber telje z nurkkiirusega



Joon. 37



Joon. 38

ω (joon. 38). On selge, et ω ja vaadeldava punkti raadiusvektori **r** vektorkorrutis on vektor, mille suund ühtib vektori **v** suunaga ning mille moodul on $\omega r \sin\alpha = \omega R$, s. o. v (vt. valemit 10.9)). Seega on vektorkorrutis $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ nii suuna kui ka mooduli poolest võrdne vektoriga **v**:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]. \tag{11.4}$$

Valemile (11.4) võib anda teise kuju. Selleks kujutame raadiusvektorit **r** kahe komponendi, z-teljega paralleelse vektori $\mathbf{r}_z$ ja sellega risti oleva vektori **R** summana: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_z + \mathbf{R}$ (vt. joon. 38). Teinud niisuguse asenduse valemis (11.4) ning kasutades vektorkorrutise distributiivsuseomadust, saame:

$$[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] = [\boldsymbol{\omega}, (\mathbf{r}_z + \mathbf{R})] = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_z] + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{R}].$$

Vektorid $\boldsymbol{\omega}$ ja $\mathbf{r}_z$ on kollineaarsed, seepärast on nende vektorkorrutis null ($\sin\alpha = 0$). Järelikult võime kirjutada

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{R}]. \tag{11.5}$$

Edaspidi märgime pöörlemise kirjeldamisel tähega **R** pöörlemistelje punktist tõmmatud raadiusvektori **r** teljega risti olevat komponenti. Selle vektori moodul on võrdne punkti kaugusega teljest.

Teine peatükk

AINEPUNKTI DÜNAAMIKA

§ 12. KLASSIKALINE MEHAANIKA. SELLE RAKENDATAVUSE PIIRID

Kinemaatika kirjeldab kehade liikumist, puudutamata küsimust, miks keha liigub just nii (näiteks ühtlaselt mööda ringjoont või ühtlaselt kiirenevalt mööda sirget) ja mitte teisiti.

Dünaamika uurib kehade liikumist seoses nende põhjustega, (kehade interaktsioonidega), mis tingivad liikumise iseloomu.

Niinimetatud klassikalise ehk Newtoni mehaanika aluseks on Newtoni poolt 1687. a. formuleeritud kolm dünaamika põhiseadust.

Newtoni seadused (nagu kõik teisedki füüsikaseadused) tekkisid suure hulga katselise materjali üldistamise tulemusena. Seaduste kehtivust väga laialdase, kuid siiski piiratud nähtusteringi jaoks kinnitab nendest tuletatud järelduste kooskõla katsetega.

Newtoni mehaanika saavutas kahe sajandi vältel nii suurt edu, et paljud XIX sajandi füüsikud olid veendunud tema kõikvõimsuses. Arvati, et iga füüsikanähtust on võimalik seletada, kui taandada see Newtoni seadustele alluvatele mehaanikanähtustele. Kuid teaduse arenemise käigus ilmnesid uued faktid, mis ei mahtunud enam klassikalise mehaanika raamidesse. Need said seletuse uutes teooriates — erirelatiivsusteoorias ja kvantmehaanikas.

Einsteini poolt 1905. a. loodud erirelatiivsusteoorias revideeriti radikaalselt klassikalisi ettekujutusi ruumist ja ajast. Selle tulemusena loodi suurte kiiruste mehaanika ehk nagu seda teisiti nimetatakse — relativistlik mehaanika. Kuid uus ei eita täielikult vana, klassikalist mehaanikat. Relativistliku mehaanika võrrandid muunduvad piirjuhul (kiiruste puhul, mis on valguse kiirusega võrreldes väikesed) klassikalise mehaanika võrranditeks. Nii sai klassikalisest mehaanikast relativistliku üks erijuht ning ta säilitas oma endise tähtsuse seesuguste liikumiste kirjeldamisel, mille kiirused on palju väiksemad valguse kiirusest.

Analoogiline on ka klassikalise mehaanika ja käesoleva sajandi kahekümnendail aastail aatomifüüsika arengu tulemusena tekkinud kvantmehaanika vahekord: kvantmehaanika võr-