

Teine osa

VÖNKUMISED JA LAINED

Üheksas peatükk

VÖNKLIHKUMINE

§ 61. ÜLDTEADMISI VÖNKUMISTEST

Võnkumisteks nimetatakse protsesse, millele on iseloomulik teatud korduvus. Niisugune korduvus on omane näiteks kellapendli liikumisele, pillikeele või helihargi võnkumisele, kondensaatori pinge muutumisele raadiovastuvõtja võnkeringis jms.

Olenevalt korduva protsessi füüsikalisest iseloomust võivad võnkumised olla mehaanilised, elektromagnetilised, elektromehaanilised jne. Käesolevas peatükis käsitletakse mehaanilisi võnkumisi.

Võnkumised on laialdaselt levinud nii looduses kui ka tehnikas ja paljudel juhtudel mängivad nad negatiivset osa. Rongirataste tõugetel rõõbaste liitekohtades tekkiv silla võnkumine, sõukruvi pöörlemisest tingitud laevakere võnkumine (vibratsioon), lennuki tiibade vibratsioon on nähtused, mis võivad viia katastroofideni. Niisugustel juhtudel on ülesandeks võnkumisi vältida või tuleb vähemalt selle eest hoolt kanda, et võnkumised ei saavutaks ohtlikku ulatust.

Samal ajal on võnkumine paljude tehnikaharude alus. Nii näiteks on võnkeprotsessidele rajatud kogu elektrotehnika.

Olenevalt sellest, millistele mõjudele on allutatud võnkuv süsteem, liigitatakse võnkumised vabadeks ehk omavõnkumisteks, ise- ehk auto- ja parameetrilisteks võnkumisteks.

Vabadeks ehk omavõnkumisteks nimetatakse võnkumisi, mis toimuvad süsteemis pärast seda, kui süsteem on saanud tõuke või viidud välja tasakaaluasendist ning jäetud omapead, vabaks iga-sugustest välismõjudest. Niisuguse võnkumise näide võib olla niidi otsas rippuva kuulikese (pendli) võnkumine. Et selline süsteem võnkuma hakkaks, on tarvis kas tõugata kuulikest horisontaalsuunas või, viinud ta tasakaaluasendist kõrvale, lasta vabaks.

Sundvõnkumisteks nimetatakse võnkumisi, mille käigus võnkuvale süsteemile mõjub perioodiliselt muutuv välisjõud. Näiteks võib tuua silla võnkumise, mis tekib, kui taksammu astuvad inimesed lähevad üle silla.

Autovõnkumised, samuti kui sundvõnkumised, toimuvad välisjõudude mõjul, kuid viimasel juhul reguleerib võnkuv süsteem ise välismõju temale (ajahetked, mil võnkuv süsteem välismõju vastu

võtab, on selle süsteemi enese poolt määratud). Autovõnkumise näiteks võib olla võnkumine, kus kellapendel saab tõukeid kas ülestõstetud põmmi või üleskeeratud vedru energia arvel, kuid need tõuked saab pendel ainult tasakaaluasendi läbimise hetkedel.

Parameetriliste võnkumiste korral muudab välismõju perioodiliselt süsteemi mingit parameetrit. Näiteks võib ta muuta niidi pikkust, mille otsas ripub võnkuv kuulike.

Lihtsamad võnkumised on harmoonilised võnkumised, s. o. niisugused, kus võnkumise suuruse (näiteks pendli hälbe) sõltuvuse ajast määrab siinus- või koosinusfunktsioon. Harmoonilised võnkumised on väga tähtsad, sest, esiteks, looduses ja tehnikas esineb sageli võnkumisi, mis on lähedased harmoonilistele, ning teiseks, paljusid teistsuguse ajalise sõltuvusega perioodilisi protsesse võib kujutada mitme harmoonilise võnkumise summana.

§ 62. HARMOONILISED VÖNKUMISED

Vaatleme süsteemi, mis koosneb vedru otsas rippuvast kuulikesest massiga m (joon. 162). Tasakaaluasendis on kuulikesele mõjuv raskusjõud mg tasakaalustatud elastsusjõu $k\Delta l_0$ poolt:

$$mg = k\Delta l_0. \quad (62.1)$$

Hakkame kuulikese nihkumist tasakaaluasendist iseloomustama koordinaadiga x , kusjuures telg x on suunatud vertikaalselt alla ning selle nullpunkt ühtib kuulikese tasakaaluasendiga. Kui nihutada kuulike tasakaaluasendist x võrra kõrvale (x on algebraline suurus), siis vedru pikeneb $\Delta l_0 + x$ võrra ning resultantjõu projektsioon teljel x (tähistame selle tähega f) omandab väärtuse

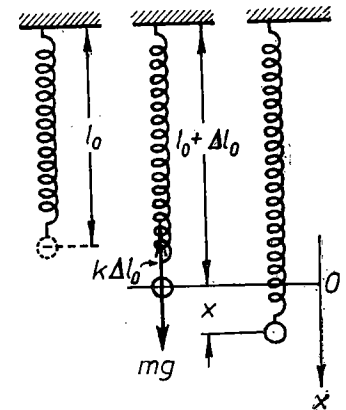
$$f = mg - k(\Delta l_0 + x).$$

Arvestades tasakaalutingimust (62.1), saame

$$f = -kx. \quad (62.2)$$

Miinusmärk valemis (62.2) tähendab seda, et hälve ja jõud on vastassuunalised: kui kuulike on nihutatud tasakaaluasendist allapoole ($x > 0$), on jõud suunatud ülespoole ($f < 0$), kuulikese nihkumisel ülespoole ($x < 0$) on jõud suunatud allapoole ($f > 0$). Seega on jõud f 1) võrdeline kuulikese hälbe-ga tasakaaluasendist, 2) suunatud alati tasakaaluasendi poole.

Kirjeldatud näites on jõud (62.2) olemuselt elastsusjõud. Võib juhtuda,



Joon. 162

et mõne muu päritoluga jõud muutub samasuguse seaduspärasuse järgi: on võrdne $-kx$, kus k on positiivne konstantne suurus. Niisuguseid jõudusid, olenemata nende iseloomust (päritolust), nimetatakse kvaasielastsusjõududeks.

Süsteemi nihutamisel tasakaaluasendist x võrra tuleb kvaasielastsusjõu ületamiseks teha tööd

$$A = \int_0^x (-f) dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

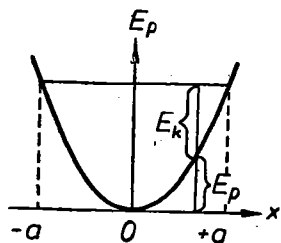
See töö saab süsteemi potentsiaalseks energiaks. Järelikult omab tasakaaluasendist väljaviidud süsteem, milles mõjuvad kvaasielastsusjõud, potentsiaalset energiat¹

$$E_p = \frac{kx^2}{2} \quad (62.3)$$

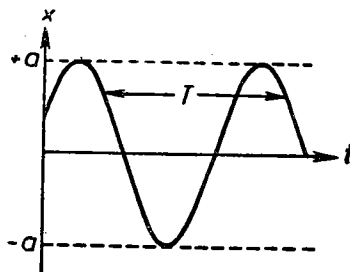
(potentsiaalne energia tasakaaluasendis on võetud nulliks).

Avaldis (62.3) ühtib deformeeritud vedru potentsiaalse energia avaldisega (27.13).

Pöördume uuesti joonisel 162 kujutatud süsteemi juurde. Anname kuulikesele hälbe $x=a$ ning pärast seda laseme süsteemi vabaks. Jõu $f=-kx$ mõjul hakkab kuulike liikuma tasakaaluasendi poole kasvava kiirusega $v=\dot{x}$. Süsteemi potentsiaalne energia kahaneb (joon. 163), kuid kasvab tema kineetiline energia $E_k=m\dot{x}^2/2$ (vedru massi jätame arvesse võtmata). Jõudnud tasakaaluasendisse, jätkab kuulike liikumist inertsiga tõttu. See liikumine on aeglustuv ning lakkab, kui kineetiline energia on täielikult muundunud potentsiaalseks, s. o. kui kuulikese hälve on $-a$.



Joon. 163



Joon. 164

¹ Me oleme sunnitud loobuma kineetilise ja potentsiaalse energia nendest tähistest, mida kasutasime mehaanikas. Õpetuses võnkumistest on saanud tavaks tähistada võnkumiste perioodi tähegi T . Tähegi U märgitakse molekulaarfüüsikas siseenergiat. Võttes kõike seda arvesse, tähistame edaspidises kineetilist energiat sümboliga E_k ning potentsiaalset sümboliga E_p .

Seejärel toimub sama protsess kuulikese liikumisel vastassuunas. Kui hõõrdumist süsteemis ei ole, jääb süsteemi energia muutmatusks ning kuulike liigub vahemikus $x=a$ kuni $x=-a$ kui tahes kaua.

Kirjutame Newtoni teise seaduse võrrandi kuulikese kohta:

$$m\ddot{x} = -kx$$

ning teisendame selle kujule

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (62.4)$$

Koefitsient x ees on positiivne, seepärast võime anda talle kuju

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (62.5)$$

kus ω_0 on reaalne suurus.

Kasutades tähistust (62.5), saame võrrandi (62.4) kujul

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (62.6)$$

Seega kirjeldab jõu (62.2) mõjul toimuvat kuulikese liikumist teist järku lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand.

Teinud asendused, veendume, et võrrandi (62.6) üldlahend on

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (62.7)$$

kus a ja α on suvalised konstandid.

Niisiis määrab hälbe x muutumise ajas koosinusfunktsioon. Järelikult on jõu $f=-kx$ mõjul toimuv liikumine harmooniline võnkumine.

Harmoonilise võnkumise graafik, s. o. funktsiooni (62.7) graafik on kujutatud joonisel 164. Horisontaalteljele on kantud aeg t , vertikaalteljele hälve x . Et koosinus muutub -1 ja $+1$ vahel, siis x väärtused jäävad vahemikku $-a$ kuni $+a$.

Süsteemi maksimaalset hälvet tasakaaluasendist nimetatakse võnkumiste amplituudiks. Amplituud a on positiivne suurus. Tema väärtuse määrab esialgne hälve või tõuge, millega süsteem tasakaaluasendist välja viiakse.

Koosinuse märgi all seisvat suurust $\omega_0 t + \alpha$ nimetatakse võnkumise faasiks. Konstant α tähistab faasi väärtust ajahetkel $t=0$ ning kannab nimetust võnkumise algfaas. Ajalugemise alghetke muutudes muutub ka α . Järelikult määrab võnkumise algfaasi aja alghetke valik. Kuna hälbe x väärtus ei muutu, kui faasile liita või sellest lahutada 2π , siis on alati võimalik saavutada olukord, kus algfaasi moodul on väiksem kui π . Seepärast vaadeldaksegi niisuguseid juhtusid, kus α asub $-\pi$ ja $+\pi$ vahel.

¹ Või $x = a \sin(\omega_0 t + \alpha')$, kus $\alpha' = \alpha + \pi/2$.

Et koosinus on perioodiline funktsioon perioodiga 2π , siis harmooniliselt võnkuva süsteemi olekul¹ korduvad niisuguse ajavahemiku T järel, mille kestel võnkumise faas saab juurdekasvu 2π (joon. 164). Seda ajavahemikku T nimetatakse võnkumise perioodiks. Perioodi saab määrata järgmisest tingimusest:

$$[\omega_0(t+T)+\alpha] = [\omega_0 t + \alpha] + 2\pi,$$

kust

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (62.8)$$

Ajaühikus sooritatud võngete arvu nimetatakse võnkessageduseks ν . Ilmselt valitseb sageduse ja perioodi vahel järgmine seos:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (62.9)$$

Sageduse ühikuks on võetud niisuguse võnkumise sagedus, mille periood on üks sekund. Seda ühikut nimetatakse hertsiks (Hz). Sagedust 10^3 Hz nimetatakse kilohertsiks (kHz), 10^6 Hz on megaherts (MHz).

Valemist (62.8) järeldub, et

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (62.10)$$

Seega on ω_0 ajavahemikus 2π sekundit sooritatud võngete arv. Suurust ω_0 nimetatakse ring- ehk nurksageduseks. Tavalise sagedusega ν seob teda valem

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \quad (62.11)$$

Diferentseerinud (62.7) aja järgi, saame kiiruse avaldise:

$$v = \dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (62.12)$$

Nagu valemist (62.12) näha, muutub kiirus samuti harmooniliselt, kusjuures kiiruse amplituud on $a\omega_0$. Valemite (62.7) ja (62.12) võrdlusest selgub, et kiirus ennetab hälvet faasi poolest $\pi/2$ võrra.

Diferentseerinud (62.12) veel kord aja järgi, saame kiirenduse avaldise:

$$w = \ddot{x} = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \quad (62.13)$$

Avaldisest (62.13) nähtub, et kiirendus ja hälve on vastas-

¹ Tuletame meelde, et mehaanilise süsteemi olekut iseloomustavad seda moodustavate kehade koordinaatide ja kiiruste väärtused.

faasis. See tähendab, et hetkel, mil hälve saavutab maksimaalse positiivse väärtuse, on kiirendus maksimaalse negatiivse väärtusega ja vastupidi.

Joonisel 165 on kõrvutatud hälbe, kiiruse ja kiirenduse graafikuid.

Iga konkreetset võnkumist iseloomustavad amplituudi a ja algfaasi α kindlad väärtused. Nende suuruste väärtused antud võnkumise jaoks saab määrata nõndanimetatud algtingimustest, s. o. aja alghetkele vastavate hälbe ja kiiruse väärtustest x_0 ja v_0 . Tõepoolest, võtnud avaldistes (62.7) ja (62.12) $t=0$, saame kaks võrrandit:

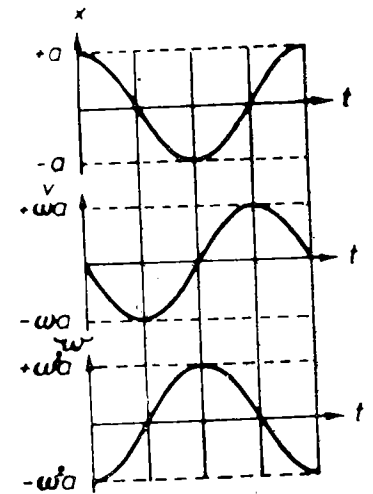
$$x_0 = a \cos \alpha, \quad v_0 = -a\omega_0 \sin \alpha,$$

millest leiame, et

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad (62.14)$$

$$\tan \alpha = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0}. \quad (62.15)$$

Võrrandit (62.15) rahuldab kaks α väärtust, mis asuvad intervallis $-\pi$ ja $+\pi$. Nendest väärtustest tuleb valida niisugune, mille puhul koosinuse ja siinuse märgid oleksid õiged.



Joon. 165

§ 63. HARMOONILISE VÕNKUMISE ENERGIA

Kvaasielastsusjõud on konservatiivne jõud, seepärast peab harmoonilise võnkumise koguenergia olema jääv suurus. Võnkumisprotsessis, nagu juba varem nägime, toimub kineetilise energia muundumine potentsiaalseks ja vastupidi, kusjuures maksimaalse hälbe hetkedel koosneb koguenergia E ainult potentsiaalsest energiast, mis saavutab siis maksimumväärtuse $E_{p \max}$:

$$E = E_{p \max} = \frac{ka^2}{2}. \quad (63.1)$$

Hetkedel, mil süsteem läbib tasakaaluasendi, koosneb koguenergia ainult kineetilisest energiast ning nüüd saavutab see oma maksimumväärtuse $E_{k \max}$:

$$E = E_{k \max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \quad (63.2)$$

(varem nägime, et kiiruse amplituud on $a\omega_0$). Lihtne on veenduda, et avaldised (63.1) ja (63.2) on omavahel võrdsed, sest (62.5) alusel on $m\omega_0^2 = k$.

Selgitame nüüd, kuidas muutuvad ajas harmoonilise võnkumise kineetiline ja potentsiaalne energia. Kineetiline energia (vt. \dot{x} avaldist (62.12))

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (63.3)$$

Potentsiaalne energia avaldub valemiga

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (63.4)$$

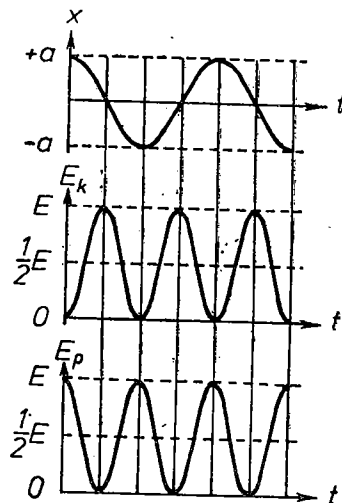
Liitnud avaldised (63.3) ja (63.4) ning võtnud arvesse (62.5), saame:

$$E = E_k + E_p = \frac{ka^2}{2} \left(\text{ehk } \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \right), \quad (63.5)$$

mis ühtib seostega (63.1) ja (63.2). Seega on harmoonilise võnkumise koguerenergia tõepoolest jääv suurus.

Kasutades trigonomeetriast tuntud valemeid, saab E_k ja E_p avaldistele anda järgmise kuju:

$$E_k = E \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = E \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right], \quad (63.6)$$



Joon. 166

$$E_p = E \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = E \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right], \quad (63.7)$$

kus E on süsteemi koguerenergia. Valemist (63.6) ja (63.7) on näha, et E_k ja E_p muutuvad sagedusega $2\omega_0$, s. o. nende muutumise sagedus on kaks korda suurem harmoonilise võnkumise sagedusest.

Joonisel 166 on kõrvutatud E_k ja E_p graafikuid.

Siinuse ruudu ja koosinuse ruudu keskmine väärtus on teatavasti võrdne poolega. Järelikult langevad E_k ja E_p keskmised väärtused kokku ning kumbki nendest on $E/2$.

§ 64. HARMOONILINE OSTSILLAATOR

Süsteemi, mida kirjeldab võrrand

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (64.1)$$

kus ω_0^2 on positiivne konstant (vt. (62.6)), nimetatakse harmooniliseks ostsillaatoriks (ehk harmooniliseks vibratsiooniks). Nagu juba teame, on võrrandi (64.1) lahendi üldkuju

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (64.2)$$

Järelikult on harmooniline ostsillaator niisugune süsteem, mis võngub harmooniliselt teatud tasakaaluasendi ümber.

Kõik eelnevates paragrahvides harmoonilise võnkumise jaoks tuletatud seaduspärasused kehtivad arusaadavalt ka harmoonilise ostsillaatori kohta. Vaatleme täiendavalt veel kahte küsimust.

Määrame harmoonilise ostsillaatori impulsi. Diferentseerinud võrrandi (64.2) aja järgi ning korrutanud tulemuse ostsillaatori massiga m , saame

$$p = m\dot{x} = -m a \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (64.3)$$

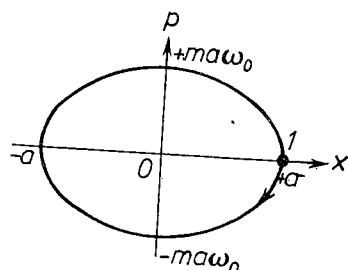
Igas asendis, mida iseloomustab hälve x , on ostsillaatoril teatud impulss p . Selleks et määrata p kui x funktsiooni, peab võrranditest (64.2) ja (64.3) elimineerima aja t . Esitame nimetatud võrrandid kujul

$$\frac{x}{a} = \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

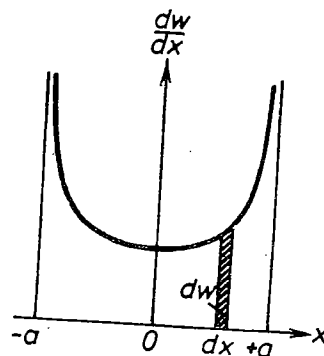
$$\frac{p}{m a \omega_0} = -\sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Tõstnud mõlemad võrrandid ruutu ning liitnud nad, saame:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{m^2 a^2 \omega_0^2} = 1. \quad (64.4)$$



Joon. 167



Joon. 168

Joonisel 167 on kujutatud graafiliselt harmoonilise ostsillaatori impulsi p sõltuvus hälbest x . Koordinaattasapinda p, x on hakatud nimetama faasitasapinnaks, vastavat graafikut aga faasitrajektooriks. Valemi (64.4) järgi on harmoonilise ostsillaatori faasitrajektoor ellips, mille poolteljed on a ja $ma\omega_0$. Faasitrajektoori iga punkt määrab hälbe x ja impulsi p , s. o. ostsillaatori oleku teatud ajahetkel. Aja jooksul liigub olekut iseloomustav punkt (lühidalt, kujutav punkt) mööda faasitrajektoori ning läbib selle võnkeperioodi kestel. On kerge veenduda, et kujutav punkt liigub mööda trajektoori kellaosuti liikumise suunas. Tõepoolest, võtame niisuguse ajahetke t' , et $\omega_0 t' + a = 2\pi n$ (n on täisarv). Sellele ajahetkele vastab $x=a$ ja $p=0$ (vt. punkti 1 joonisel 167). Järgnevatel ajahetkedel x kahaneb, p negatiivsed väärtused aga mooduli poolest kasvavad. Järelikult liigub kujutav punkt nii, nagu see on noolega näidatud joonisel 167, s. o. kellaosuti liikumise suunas.

Määrame ellipsi pindala. Nagu teada, on see võrdne ellipsi pooltelgede ja π korrutisega:

$$S = \pi a m a \omega_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{m a^2 \omega_0^2}{2}.$$

Valemi (63.5) alusel on $ma^2\omega_0^2/2$ ostsillaatori koguenergia; suurus $2\pi/\omega_0$ on võrdne $1/\nu_0$, kus ν_0 on ostsillaatori omasagedus, mis antud ostsillaatori puhul on konstantne suurus. Nii saame avaldada ellipsi pindala

$$S = \frac{1}{\nu_0} E,$$

$$E = \nu_0 S.$$

(64.5)

kust

Seega on harmoonilise ostsillaatori koguenergia võrdeline ellipsi pindalaga, võrdeteguriks aga on ostsillaatori omasagedus.

Ellipsi pindala saab arvutada kui integraali $\oint p dx$. Seega saame valemile (64.5) anda järgmise kuju:

$$E = \nu_0 \oint p dx.$$

Viimane seos mängis tähtsat osa kvantmehaanika aluste rajamisel.

Nüüd uurime küsimust, milline on tõenäosus avastada ostsillaator selle ühes või teises olekus. Ostsillaatori kiirus on maksimumne ajahetkedel, mil ta läbib tasakaaluasendi. Maksimaalse hälbe ajal aga muutub tema kiirus nulliks. Siit järeldub, et tõenäosus avastada ostsillaator ühes tema äärmistest asenditest on suurem kui tema tasakaaluasendi lähedal avastamise tõenäosus. Seda selgitab joonis 168, kus on kujutatud kõver, mis määrab nn.

tõenäosustiheduse $\frac{dw}{dx}$.¹ Tõenäosuse dw ostsillaatori antud pii-

rides dx asumiseks leiame, kui võtame kõvera ordinaadi vastavas kohas ning korrutame selle dx -ga. Tõenäosustiheduse kõvera all olev kogupindala määrab tõenäosuse, millega ostsillaatori võib avastada vahemikus $-a$ kuni $+a$, ning nagu iga kindla sündmuse tõenäosus on see võrdne ühega.

Märgime, et kvantmehaanika annab harmoonilise ostsillaatori eri olekute tõenäosuse oluliselt erineva väärtusega.

§ 65. SÜSTEEMI VÄIKESED VÕNKED TASAKAALUASENDI ÜMBRUSES

Vaatleme suvalist mehaanilist süsteemi, mille asendi saab määrata ühe suuruse abil. Tähistame selle suuruse sümboliga x . Niisugustel juhtudel öeldakse, et süsteemil on üks vabadusaste. Süsteemi asendit määrav suurus x võib olla nurk, mida loetakse teatud tasapinnast, kaugus, mida möödetakse mööda teatud kõverat (ka sirget) joont jms. Süsteemi potentsiaalne energia on ühe muutuja x funktsioon: $E_p = E_p(x)$. Valime x alguspunkti nii, et süsteemi tasakaaluasendis oleks x võrdne nulliga. Siis vastab muutujale $x=0$ funktsiooni $E_p(x)$ miinimum. Arendame $E_p(x)$ ritta x astmete järgi ning piirdume väikeste võngete uurimisega, nii et x kõrgemad astmed võib jätta arvestamata. Maclaurini valemi järgi

¹ Seda kõverat kirjeldab võrrand

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$E_p(x) = E_p(0) + E'_p(0)x + \frac{1}{2} E''_p(0)x^2$$

(x väiksuse tõttu jätame ülejäänud liikmed arvestamata).

Et $x=0$ juures on $E_p(x)$ miinimum, siis on $E'_p(0)$ võrdne nulliga, $E''_p(0)$ aga positiivne. Tähistame $E_p(0)=b$, $E''_p(0)=k$ ($k>0$), siis

$$E_p(x) = b + \frac{1}{2} kx^2. \quad (65.1)$$

Avaldis (65.1) on identne niisuguse süsteemi potentsiaalse energia avaldisega (62.3), milles mõjub kvaasielastsusjõud (konstandi b võib võtta võrdseks nulliga).

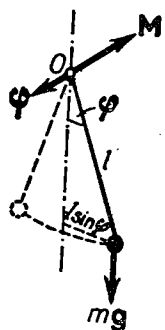
Kasutades seost (28.5), saame leida süsteemile mõjuva jõu:

$$f = f_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -kx.$$

Seega on süsteemi potentsiaalne energia väikeste hälvete puhul hálbe ruutfunktsioon, süsteemile mõjuv jõud aga omab kvaasielastsusjõu kuju. Järelikult on väikeste hälvete korral iga mehaanilise süsteemi võnkumised lähedased harmoonilistele.

§ 66. MATEMAATILINE PENDEL

Matemaatiliseks pendliks nimetatakse idealiseeritud süsteemi, mis koosneb kaalutust ja venimatust niidist, mille otsas ripub ainepunkt, s. o. keha, mille mass on koondunud ühte punkti. Matemaatilise pendli küllalt heaks lähenduseks on pika peene niidi otsa riputatud väike raske kuulike.



Joon. 169

Pendli kõrvalekalandumist tasakaaluasendist iseloomustame nurgaga φ , mille niit moodustab vertikaaliga (joon. 169). Tasakaalust väljaviidud pendli puhul tekib pöördemoment M , mille suurus on $mgl \sin \varphi$ (m on pendli mass, l — pikkus). Pöördemoment on suunatud nii, et ta püüab viia pendlit tagasi tasakaaluolekusse, olles seega analoogiline kvaasielastsusjõuga. Seepärast peab, analoogiliselt hálbe ja kvaasielastsusjõuga, omistama ka momendile M ja nurkhálbele φ vastandmärgid.¹ Järelikult on pöördemomendi avaldis

$$M = -mgl \sin \varphi. \quad (66.1)$$

¹ Vaadeldes φ -d kui vektorit, mis on seotud pöördesuunaga parema käe kruvi reegli järgi (see on lubatud nurga φ väikeste väärtuste korral), tähen-dab M ja φ märkide vastupidisus vektorite M ja φ vastassuunalisust (joon. 169).

Kirjutame pendli kohta pöörlemise dünaamika põhivõrrandi. Tähistanud nurkkiirenduse sümboliga $\ddot{\varphi}$ ning arvestades, et pendli inertsimoment on ml^2 , saame:

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi.$$

Viimase võrrandi saame teisendada kujule

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (66.2)$$

Plüüdume väikeste võngetega. Sel juhul võib võtta $\sin \varphi \approx \varphi$. Tähistanud peale selle veel

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2, \quad (66.3)$$

saame järgmise võrrandi

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (66.4)$$

mis on identne vedru otsas rippuva kuulikese võrrandiga (62.6). Selle lahend on

$$\varphi = a \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (66.5)$$

Järelikult muutub väikeste võngete korral pendli nurkhálve ajas harmooniliselt.

Nagu järeldub seosest (66.3), sõltub matemaatilise pendli võnkesagedus ainult pendli pikkusest ja raskuskiirendusest, kuid ei sõltu pendli massist. Valemitest (62.8) ja (66.3) saab tuletada keskkoolikursusest tuntud matemaatilise pendli võnkeperioodi valemi

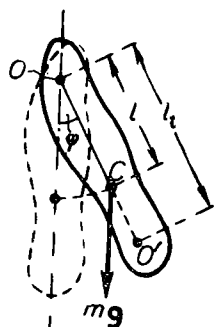
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (66.6)$$

Lisame veel, et võrrandi (66.2) lahendamine annab võnkeperioodi jaoks valemi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right\},$$

kus α on võnkeamplituud, s. o. maksimaalne nurk, mille võrra pendel kaldub kõrvale tasakaaluasendist.

§ 67. FÜÜSIKALINE PENDEL



Joon. 170

Füüsikaliseks pendliks nimetatakse jäika keha, mis saab võnkuda liikumatu punkti ümber, kusjuures see punkt ei ühti tema inertsikeskme. Tasakaaluasendis asub pendli inertsikeske C pendli kinnituspunkti O all samal vertikaalil viimasega (joon. 170). Pendli kalutamisel tasakaaluasendist nurga φ võrra tekib pöördemoment, mis püüab tuua pendli tasakaaluasendisse tagasi. See moment

$$M = -mgl \sin \varphi, \quad (67.1)$$

kus m on pendli mass, l — inertsikeskme kaugus kinnituspunktist. Miinusemärgil on sama tähendus mis valemis (66.1).

Tähistanud pendli inertsimomendi kinnituspunkti läbiva telje suhtes tähega I , võime kirjutada

$$I\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi. \quad (67.2)$$

Väikeste võngete korral saab võrrandist (67.2) meile juba tuttav võrrand

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (67.3)$$

ω_0^2 tähistab nüüd suurust

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}. \quad (67.4)$$

Võrranditest (67.3) ja (67.4) järeldub, et väikeste hälvete korral sooritab füüsikaline pendel harmoonilisi võnkumisi, mille sagedus sõltub pendli massist, tema inertsimomendist pöörlemistelje suhtes ning pöörlemistelje ja inertsikeskme vahelisest kaugusest. Vastavalt seosele (67.4) on füüsikalise pendli võnkeperiood

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (67.5)$$

Kõrvutades valemeid (66.6) ja (67.5) näeme, et matemaatilisel pendlil, mille pikkus

$$l_t = \frac{I}{ml}, \quad (67.6)$$

on samasugune võnkeperiood nagu antud füüsikalisel pendlil. Suurust l_t nimetatakse füüsikalise pendli taandatud pikkuseks. Seega on füüsikalise pendli taandatud pikkus võrdne niisuguse matemaatilise pendli pikkusega, mille võnkeperiood on võrdne antud füüsikalise pendli võnkeperioodiga.

Punkti, mis asub kinnituspunkti inertsikeskme ühendaval sirgel ning kinnituspunktist taandatud pikkuse kaugusel, nimetatakse füüsikalise pendli võnketsentriks (vt. punkti O' joonisel 170). Steineri lause alusel võib avaldada inertsimomendi I :

$$I = I_0 + ml^2, \quad (67.7)$$

kus I_0 on pendli inertsimoment telje suhtes, mis läbib inertsikeset ning on paralleelne pöörlemisteljega. Asendanud seose (67.7) valemisse (67.6), saame:

$$l_t = \frac{I_0}{ml} + l. \quad (67.8)$$

Valemist (67.8) näeme, et taandatud pikkus on alati suurem kui l , seega asuvad kinnituspunkt ja võnketsenter teine teisel pool inertsikeset.

Kinnitame nüüd pendli tema võnketsentris O' . Niisugusel juhul on taandatud pikkus vastavalt valemile (67.8)

$$l'_t = \frac{I_0}{ml'} + l', \quad (67.9)$$

kus l' on pendli esialgse võnketsentri ja tema inertsikeskme vaheline kaugus. Arvestades, et $l' = l_t - l$, saame avaldise (67.9) kirjutada kujul:

$$\begin{aligned} l'_t &= \frac{I_0}{m(l_t - l)} + l_t - l = \\ &= l_t + \frac{1}{m(l_t - l)} \left[(I_0 + ml^2) - mll_t \right]. \end{aligned}$$

Kandilistes sulgudes seisev avaldis on võrdne nulliga. Tõepoolest, $I_0 + ml^2$ on võrdne esialgse pöörlemistelje suhtes võetud inertsimomendiga I ; sama suurusega, vastavalt avaldisele (67.6), on võrdne ka $ml l_t$. Nii tulime otsusele, et võnketsentris kinnitatud pendli taandatud pikkus ning järelikult ka tema võnkeperiood jäävad samaks, mis olid alguses. Järelikult võib kinnituspunkti ja võnketsentri vastastikku ära vahetada, s.t. kui viia kinnituspunkt võnketsentrisse, saab endine kinnituspunkt uueks võnketsentriks.

Sellele pendli omadusele on rajatud raskuskiirenduse määramine nõndanimetatud pööratava ehk reversioonpendli abil. Reversioonpendliks nimetatakse pendlit, millel on kaks paralleelset toetusprismat, teine teises pendli otsas. Neid prisme saab korraldada kasutada pendli kinnituspunktidenä. Piki pendlit on võimalik nihutada ning soovitud kohas kinnitada raskeid koorumusi, mille nihutamise saavutatakse niisugune olukord, kus pendel, ükskõik kummale prismale me selle toetame, võngub sama perioodiga. Niisugusel juhul on toetusprismade servade vahed

gus võrdne l_t . Mõõtnud nüüd pendli võnkeperioodi ning teades l_t väärtust, saab valemist

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_t}{g}}$$

määrata raskuskiirenduse g .

§ 68. HARMOONILISTE VÕNKUMISTE GRAAFILINE KUJUTAMINE. VEKTORDIAGRAMM

Mitme ülesande lahendamine, näiteks samasihiliste võnkumiste liitmine, osutub palju lihtsamaks ja piltlikumaks, kui kujutada harmoonilisi võnkumisi graafiliselt, vektoritena tasapinnal. Nii saadud skeemi nimetatakse vektordiagrammiks.

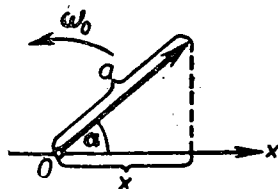
Valime telje ning tähistame selle tähega x (joon. 171). Teljel võetud punktist O joonestame vektori pikkusega a , mis moodustab teljega nurga α . Kui panna see vektor pöörlema nurkkiirusega ω_0 , siis liigub vektori otspunkti projektsioon teljel x mööda telje punktide $-a$ ja $+a$ vahel ning selle projektsiooni koordinaat muutub ajas seaduse

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

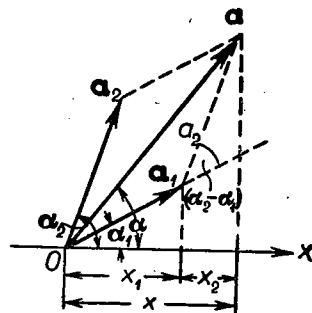
järgi.

Järelikult võngub vektori otspunkti projektsioon teljel harmooniliselt. Selle võnkumise amplituud on võrdne vektori pikkusega, nurksagedus vektori pöörlemise nurkkiirusega ning algfaas võrdne nurgaga, mille vektor moodustas teljega aja arvestamise alghetkel.

Õeldust järeldub, et harmoonilist võnkumist saab kujutada vektori abil, mille pikkus on võrdne võnkeamplituudiga ning suund moodustab teljega x võnkumise algfaasiga võrdse nurga.



Joon. 171



Joon. 172

§ 69. SAMASIHILISTE VÕNKUMISTE LIITMINE

Esineb juhte, kus keha võtab üheaegselt osa mitmest võnkumisest, mis toimuvad kas mööda sama sirget või erinevates sihtides. Kui näiteks riputada raske kuulike vedru abil vedrudega varustatud vaguni lakke, siis koosneb kuulikese liikumine Maa suhtes kahest võnkumisest: need on vaguni võnkumine Maa suhtes ning kuulikese võnkumine vaguni suhtes.

Vaatleme kahe ühesuguse sagedusega samasihilise harmoonilise võnkumise liitmist. Võnkuva keha hälve x on kahe hälbe x_1 ja x_2 summa. Need hälbed avalduvad järgmisel kujul:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \\ x_2 &= a_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (69.1)$$

Kujutame võnkumisi vektoritena a_1 ja a_2 (joon. 172). Konstrueerime vektorite liitmise reegli järgi resultantvektori a . Ilmselt on selle vektori projektsioon teljel x võrdne liidetavate vektorite projektsioonide summaga:

$$x = x_1 + x_2.$$

Järelikult kujutab vektor a resultantvõnkumist. See vektor pöörleb sama nurkkiirusega ω_0 mis vektorid a_1 ja a_2 , seega on resultantliikumine harmooniline võnkumine sagedusega ω_0 , amplituudiga a ning algfaasiga α .

Konstruksioonist nähtub, et

$$\begin{aligned} a^2 &= a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \end{aligned} \quad (69.2)$$

$$\tan \alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}. \quad (69.3)$$

Nii taandub harmooniliste võnkumiste liitmine vektorite abil vektorite liitmise operatsioonile. See võte on eriti kasulik näiteks optikas, kus valguse võnkumised mingis punktis on paljude laine-fronti eri piirkondadest antud punkti saabuvate võnkumiste liitumise tulemus.

Valemid (69.2) ja (69.3) saab tuletada ka puhtanalüütiliselt, kui liita võrrandid (69.1) ning teha läbi vastavad trigonomeetrilised teisendused. Ent meie poolt kasutatud meetod on palju lihtsam ja piltlikum.

Analüüsime nüüd amplituudi avaldist (69.2). Kui liidetavate võnkumiste faasivahe $\alpha_2 - \alpha_1$ on null, on resultantvõnkumise amplituud võrdne a_1 ja a_2 summaga. Kui faasivahe $\alpha_2 - \alpha_1$ on kas $+\pi$ või $-\pi$, s.o. kui võnkumised on vastasfaasis, siis on resultantvõnkumise amplituud $|a_1 - a_2|$.

Kui võnkumiste x_1 ja x_2 sagedused on erinevad, pöörlevad

vektorid \mathbf{a}_1 ja \mathbf{a}_2 erinevate nurkkiirustega. Sel juhul saame suure poolest pulseeriva vektori \mathbf{a} , mis pöörleb ebaühtlaselt. Järelikult pole resultantliikumine niisugusel juhul harmooniline võnkumine, vaid mingi keerulisem võnkliikumine.

§ 70. TUIKLEMINE

Erilist huvi pakub juht, kus kahe samasihilise liidetava võnkumise sagedused erinevad vähe. Nagu kohe näeme, võib resultantliikumist niisugusel juhul kujutada pulseeriva amplituudiga harmoonilise võnkumisenä. Sellist võnkumist nimetatakse tui-
lemiseks.

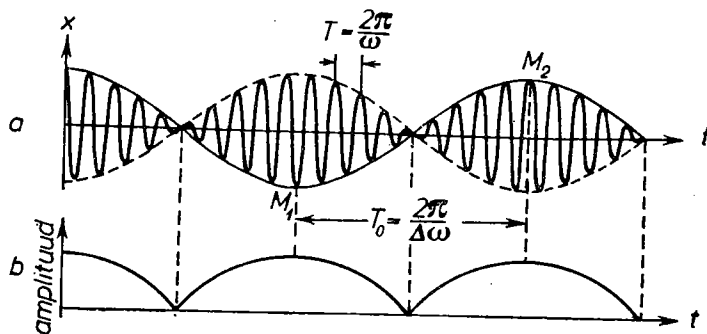
Tähistame ühe võnkumise sageduse ω , teisel $\omega + \Delta\omega$. Eelduse järgi $\Delta\omega \ll \omega$. Olgu mõlema võnkumise amplituudid ühesugused ning võrdsed a . Kuna võnkumiste sagedused on veidi erinevad, siis on alati võimalik valida aja arvestamise algthk nii, et mõlema võnkumise algfaasid oleksid nullid. Praktiliselt tähendab see, et me peame ootama, kuni hálbed kummaski võnkumises saavutavad maksimaalse positiivse väärtuse, ning sellel hetkel «käivitama stopperi». Niisugusel juhul on liidetavate võnkumiste võrrandid

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cos \omega t, \\ x_2 &= a \cos (\omega + \Delta\omega) t. \end{aligned}$$

Liitnud need avaldised ning kasutanud trigonomeetrilist valemit koosinuste summa kohta, saame

$$x = x_1 + x_2 = \left(2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t \quad (70.1)$$

(teises teguris on jäetud arvestamata $\Delta\omega/2$, mis on tähtsusetult väike, võrreldes ω -ga).



Joon. 173

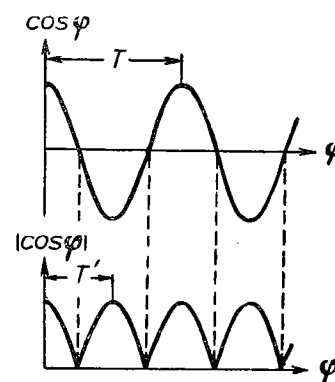
Funktsiooni (70.1) graafik tingimusel, et $\frac{\omega}{\Delta\omega} = 10$, on kujutatud joonisel 173, a.

Sulgudes olev tegur valemis (70.1) muutub palju aeglasemalt kui teine tegur. Et $\Delta\omega \ll \omega$, siis aja jooksul, mil tegur $\cos \omega t$ sooritab mitu täisvõnget, sulgudes seisev tegur peaaegu ei muutu. See annab meile võimaluse vaadelda võnkumist (70.1) kui harmoonilist võnkumist sagedusega ω , mille amplituud muutub perioodiliselt. Sulgudes sisalduvat avaldist ei saa pidada selle seaduse väljenduseks, sest ta muutub vahemikus $-2a$ ja $+2a$, amplituud aga on definitsiooni kohaselt positiivne suurus. Amplituudi graafik on kujutatud joonisel 173, b. Amplituudi analüütiline avaldis on ilmselt

$$\text{amplituud} = \left| 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (70.2)$$

Funktsioon (70.2) on perioodiline funktsioon, mille sagedus on kaks korda suurem mooduli märgi all seisva avaldise sagedusest (vt. joon. 174, kus on kõrvutatud koosinuse ja tema mooduli graafikuid), s.o. sagedusest $\Delta\omega$. Nii on amplituudi pulsatsiooni sagedus ehk tuiklamise sagedus võrdne liidetavate võnkumiste sageduste vahega.

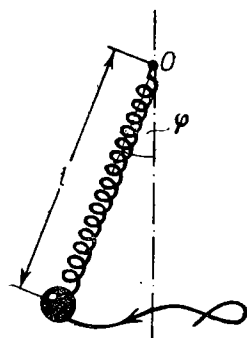
Paneme tähele, et tegur $2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$ määrab amplituudi ja mõjutab ka võnkumise faasi. Viimane asjaolu avaldub näiteks selles, et amplituudi naabermaksimumidele vastavad hálbed on vastandmárgilised (vt. punkte M_1 ja M_2 joonisel 173, a).



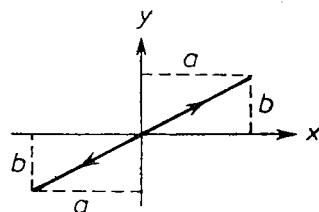
Joon. 174

§ 71. RISTUVATE VÕNKUMISTE LIITMINE

Võtame vaatluse alla süsteemi, millel on kaks vabadusastet, s.o. niisuguse süsteemi, mille asendi määramiseks on tarvis kahte suurust. Näiteks võiks olla pika kerge vedru otsa riputatud raske kuulike, kusjuures vedru teine ots on kinnitatud šarniiri külge nii, et kuulike koos vedruga saab võnkuda nagu pendel vertikaaltasapinnas. Kuulike asukoht on määratud nurgaga φ , mille moodustab vedru telg vertikaaliga, ning kaugusega l šarniiri teljest kuulikese tsentrini. Kuulike saab võtta osa kahest võnkumisest: esiteks võnkumisest, kus muutub nurk φ , teiseks võnkumisest, kus muutub kaugus l . Esimese võnkumise sageduse määravad vedru pikkus l ja raskuskiirendus g , teise võnkumise sagedus on määratud vedru elastsusteguriga k ja kuulikese massiga m .



Joon. 175



Joon. 176

Kui tekitada mõlemad võnkumised korraga, siis üldjuhul hakkab kuulike liikuma mööda keerukat trajektoori (joon. 175), mille kuju sõltub mõlema võnkumise sageduste ja algfaaside vahekorrast:

Teise näitena vaatleme rasket kuulikest, mis ripub pika peene niidi otsas (matemaatiline pendel).¹ See kuulike saab sooritada kahte võnkumist vastastikku ristuvates sihtides, mõlema võnkumise sagedus on seejuures ühesugune (mõlemad on määratud pendli pikkusega l ning raskuskiirendusega g). Niisugusel juhul liigub kuulike kõverjoonelist trajektoori mööda, mille kuju sõltub võnkumiste faasivahest.

Asume nüüd kahe koordinaattelgede x ja y sihis toimuva ühesuguse sagedusega ω harmoonilise võnkumise liitmise juurde. Valime aja arvutamise alghetke nii, et esimese võnkumise algfaas oleks null. Siis saame kirjutada võnkumiste võrrandid järgmisel kujul:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= b \cos (\omega t + \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (71.1)$$

kus α on võnkumiste faasivahe.

Võrrandisüsteem (71.1) kujutab endast mõlemas võnkumises osaleva keha trajektoori võrrandit parameetrilisel kujul. Et anda sellele võrrandile tavaline kuju, peab võrranditest (71.1) elimineerima aja t . Esimesest võrrandist järeldub, et

$$\cos \omega t = \frac{x}{a}. \quad (71.2)$$

¹ § 66 oletasime, et niisugune pendel võngub kindlas tasapinnas, seetõttu saab teda pidada süsteemiks, millel on üks vabadusaste.

Järelikult,

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (71.3)$$

Nüüd teisendame süsteemi (71.1) teist võrrandit summa koosinuse valemi järgi ning asendame $\cos \omega t$ ja $\sin \omega t$ nende väärtustega (seosed (71.2) ja (71.3)). Tulemuseks saame

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Viimane võrrand teiseneb üsna lihtsalt järgmisele kujule:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (71.4)$$

Nagu analüütilisest geomeetriast teada, kirjeldab võrrand (71.4) ellipsit, mille teljed on suunatud suvaliselt koordinaattelgede x ja y suhtes. Ellipsi orientatsioon ja tema pooltelgede pikkused sõltuvad küllalt keerulisel viisil amplituudidest a ja b ning faasivahest α .

Uurime trajektoori kuju mõnel erijuhul.

1. Faasivahe α on null. Sel juhul võtab võrrand (71.4) kuju

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 = 0,$$

kust järeldub sirge võrrand

$$y = \frac{b}{a} x. \quad (71.5)$$

Võnkuv punkt liigub mööda seda sirget ning tema kaugus koordinaattelgede algusest $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Asendame selles x ja y nende avaldistega süsteemist (71.1) ning arvestame, et $\alpha = 0$. Saame seaduse, mis määrab r sõltuvuse ajast:

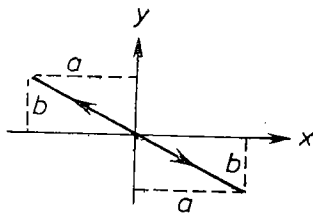
$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \omega t. \quad (71.6)$$

Võrrandist (71.6) näeme, et resultantliikumine on harmooniline võnkumine mööda sirget (71.5) sagedusega ω ning amplituudiga $\sqrt{a^2 + b^2}$ (joon. 176).

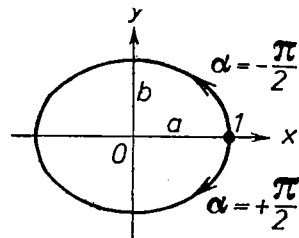
2. Faasivahe α on $\pm \pi$. Võrrand (71.4) saab siis kuju

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = 0,$$

millest selgub, et resultantliikumine on harmooniline võnkumine mööda sirget



Joon. 177



Joon. 178

$$y = -\frac{b}{a}x$$

(joon. 177).

3. Kui $\alpha = \pm\pi/2$, saab võrrand (71.4) kuju

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (71.7)$$

See on ellipsi võrrand. Ellipsi poolteljed on võrdsed vastavate võnkumiste amplituudidega. Kui amplituudid a ja b on võrdsed, kõduneb ellips ringjooneks.

Juhud $\alpha = +\pi/2$ ja $\alpha = -\pi/2$ erinevad ellipsil või ringjoonel liikumise suuna poolest. Kui $\alpha = +\pi/2$, võtavad võrrandid (71.1) järgmise kuju:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= -b \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (71.8)$$

Ajahetkel $t=0$ on keha punktis 1 (joon. 178). Järgnevatel ajahetkedel koordinaat x kahaneb, koordinaat y aga muutub negatiivseks. Järelikult toimub liikumine kellaosuti liikumise suunas.

Kui $\alpha = -\pi/2$, võtavad võnkumiste võrrandid kuju:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= b \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (71.9)$$

Siit saab järeldada, et liikumine toimub vastu kellaosuti liikumise suunda.

Õeldust järeldub, et ühtlast liikumist nurkkiirusega α mööda ringjoont raadiusega R võib kujutada kui kahe ristuva võnkumise

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \omega t, \\ y &= \pm R \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (71.10)$$

summat (plussmärk vastab liikumisele vastu kellaosuti liikumise suunda, miinusmärk liikumisele kellaosuti suunas).

Lõpuks märgime veel, et juhul kui ristuvate võnkumiste sage-

dused erinevad väga väikese väärtuse $\Delta\omega$ võrra, võib neid vaadelda kui võnkumisi, millel on sama sagedus, kuid aeglaselt muutuv faasivahe. Tõepoolest, võnkumiste võrrandid võib kirjutada kujul

$$\begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= b \cos [\omega t + (\Delta\omega t + \alpha)]. \end{aligned}$$

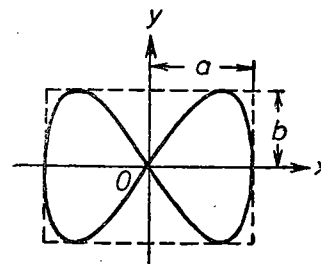
ning avaldist $\Delta\omega t + \alpha$ võib käsitada kui faasivahet, mis muutub ajas lineaarselt.

Resultantliikumine toimub sel juhul aeglaselt muutuvat kõverat mööda, mis võtab järjestikku kõikidele faasivahedele $-\pi$ kuni $+\pi$ vastava kuju.

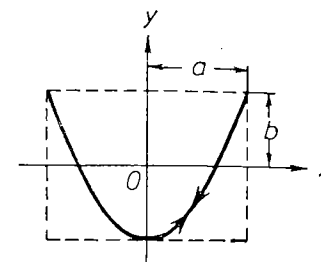
§ 72. LISSAJOUS' KUJUNDID

Kui ristuvate võnkumiste sagedused pole võrdsed, on resultantliikumise trajektoord suhteliselt keerulised kõverad. Neid nimetatakse Lissajous' kujunditeks. Joonisel 179 on kujutatud üks lihtsamaid trajektoore, mis vastab sageduste suhtele 1:2, kui faasivahe on $\pi/2$. Võnkumiste võrrandid on sel juhul

$$\begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= b \cos \left(2\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$



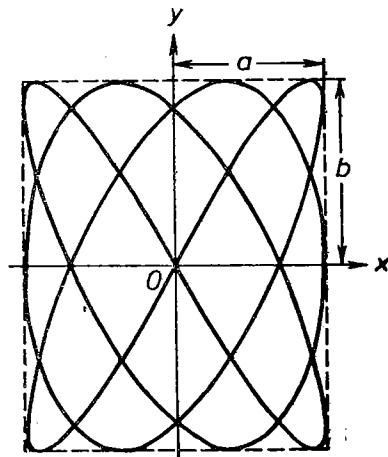
Joon. 179



Joon. 180

Aja jooksul, mil võnkuv punkt liigub x -telje sihis ühest äärmisest asendist teise, liigub ta y -telje sihis alates nullasendist ühte äärmisse asendisse, sealt teise ning siis uuesti nullasendisse.

Kui sageduste suhe on 1:2 ning faasivahe null, kõduneb punkti trajektoor lahtiseks kõveraks (joon. 180), mida mööda punkt liigub edasi-tagasi.



Joon. 181

Mida lähemal ühele on sageduste suhet väljendav ratsionaalne murd, seda keerulisem on Lissajous' kujund. Joonisel 181 on näitena esitatud juht, kus sageduste suhe on 3:4 ning faasivahe $\pi/2$.

§ 73. SUMBUVAD VÕNKUMISED

Harmoniliste võnkumiste võrrandi tuletamisel oletasime, et võnkuvale punktile mõjub ainult kvaasielastsusjõud. Igas reaalses võnkuvas süsteemis esinevad aga ka takistusjõud, mille mõjul süsteemi energia kahaneb. Kui energia kahanemist ei kompenseerita välisjõudude töö arvel, hakkavad võnkumised sumbuma.

Võtame vaatluse alla sumbuvad vabad (ehk oma-) võnkumised. Kui võnkumised on vabad, siis see tähendab, et süsteem, mis on välisjõudude poolt tasakaaluasendist välja viidud või saanud välisjõududel algtooke, on edaspidi jäetud vabaks ning temas mõjuvad vaid kvaasielastsusjõud ja keskkonnatakistus. Piirdume väikeste võngete uurimisega. Siis on nii kiirus kui ka kiirendus väikesed, väikeste kiiruste puhul aga on takistusjõud võrdeline kiiruse suurusega:

$$f_r = -rv = -r\dot{x}, \quad (73.1)$$

kus r on konstant, mida nimetatakse takistusteguriks. Miinusmärk on tingitud sellest, et f ja v on vastassuunalised.

Kirjutame võnkuvale keha jaoks Newtoni teise seaduse võrrandi

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

ning avaldame selle järgmisel kujul:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (73.2)$$

kus on kasutatud tähistusi

$$2\beta = \frac{r}{m}, \quad (73.3)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (73.4)$$

ω_0 on see sagedus, millega toimuks süsteemi vabavõnkumine keskkonnatakistuse puudumisel, s.o. kui $r=0$. Seda sagedust nimetatakse süsteemi võnkumise omasageduseks.

Harmonilise ostsillaatori puhul jääb amplituudiga a määratud võnkumiste ulatus konstantseks. Keskkonnatakistuse olemasolu tingib võnkumiste ulatuse kahanemise, seepärast otsime võrrandi (73.2) lahendit järgmisel kujul:

$$x = a(t) \cos(\omega t + \alpha), \quad (73.5)$$

kus $a(t)$ on mingi aja funktsioon.

Diferentseerinud (73.5) aja t järgi, leiame \dot{x} ja \ddot{x} :

$$\dot{x} = \dot{a} \cos(\omega t + \alpha) - a\omega \sin(\omega t + \alpha),$$

$$\ddot{x} = \ddot{a} \cos(\omega t + \alpha) - 2\dot{a}\omega \sin(\omega t + \alpha) - a\omega^2 \cos(\omega t + \alpha).$$

Pärast nende avaldiste asetamist võrrandisse (73.2) ning mõningaid teisendusi saame järgmise seose:

$$[\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + (\omega_0^2 - \omega^2)a] \cos(\omega t + \alpha) - 2\omega[\dot{a} + \beta a] \sin(\omega t + \alpha) = 0.$$

Selleks et saadud võrrand oleks rahuldatud aja t igasuguste väärtuste puhul, peavad $\cos(\omega t + \alpha)$ ja $\sin(\omega t + \alpha)$ ees seisvad koefitsiendid olema võrdsed nulliga. Nii saame kaks võrrandit:

$$\dot{a} + \beta a = 0, \quad (73.6)$$

$$\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + (\omega_0^2 - \omega^2)a = 0. \quad (73.7)$$

Võrrandi (73.6) võib avaldada kui

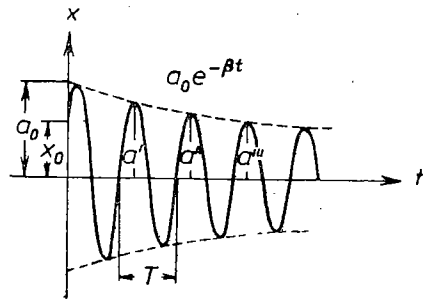
$$\frac{da}{dt} = -\beta a, \quad \text{kust} \quad \frac{da}{a} = -\beta dt.$$

Viimase võrrandi integreerimine annab $\ln a = -\beta t + \ln a_0$, kus $\ln a_0$ on integreerimiskonstant. Lõpuks, võtnud saadud seose anti-logaritmi, saame funktsiooni $a(t)$ järgmisel kujul:

$$a = a_0 e^{-\beta t}. \quad (73.8)$$

On lihtne veenduda, et $\dot{a} = -\beta a$ ning $\ddot{a} = \beta^2 a$. Nende väärtuste asendamine võrrandisse (73.7) annab seose

$$\beta^2 a - 2\beta^2 a + (\omega_0^2 - \omega^2)a = 0,$$



Joon. 182

mille taandamisel nullist erineva teguriga a saame

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (73.9)$$

Kui $\omega_0^2 > \beta^2$, siis on ω reaalne suurus ning diferentsiaalvõrrandi (73.2) lahendi võib esitada kujul (73.5). Seega tingimusel, et sumbumine ei ole eriti tugev ($\beta < \omega_0$), kirjeldab võnkumisi funktsioon

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (73.10)$$

Selle funktsiooni graafik on kujutatud joonisel 182. Punktiirjoon kujutab piire, millesse jääb võnkumise punkti hälve x .

Vastavalt funktsiooni (73.10) kujule võib süsteemi liikumist pidada sagedusega ω toimuvaks harmooniliseks võnkumiseks, mille amplituud muutub seaduse (73.8) järgi. Ülemine kõver joonisel 182 on funktsiooni $a(t)$ graafik, kus a_0 on amplituudi väärtus aja arvutamise alghetkel. Hälbe algväärtus x_0 sõltub peale a_0 ka algfaasist α : $x_0 = a_0 \cos \alpha$ (joon. 182).

Võnkumiste sumbumise kiiruse määrab suurus $\beta = r/2m$, mida nimetatakse sumbeteguriks. Määrame aja τ , mille jooksul amplituud väheneb e korda. Definitsiooni järgi $e^{-\beta\tau} = e^{-1}$, kust $\beta\tau = 1$. Järelikult on sumbetegur ja aeg, mille kestel amplituud väheneb e korda, pöörd suurused.

Vastavalt valemile (73.9) on sumbuvaate võnkumiste periood

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (73.11)$$

Kui keskkonnataktus pole kuigi suur ($\beta^2 \ll \omega_0^2$), siis on võnkumiste periood praktiliselt võrdne $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Sumbeteguri kasvades võnkumiste periood suureneb.

Järgnevad maksimaalsed hälbed kummalegi poole (näiteks a' , a'' , a''' jne. joonisel 182) moodustavad geomeetrilise progressiooni. Tõepoolest, kui $a' = a_0 e^{-\beta t}$, siis $a'' = a_0 e^{-\beta(t+T)} = a' e^{-\beta T}$,

$a''' = a_0 e^{-\beta(t+2T)} = a'' e^{-\beta T}$ jne. Üldiselt on perioodi võrra erinevatele ajahetkedele vastavate amplituudide suhe

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\beta T}.$$

Seda suhet nimetatakse sumbe dekrementiks, tema logaritmi aga sumbuvaate logaritmiliseks dekrementiks:

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T. \quad (73.12)$$

Viimast suurust kasutataksegi tavaliselt võnkumiste sumbumise iseloomustamiseks. Väljendatud β vastavalt valemile (73.12) λ ja T kaudu, saame amplituudi kahanemise seaduse kirjutada järgmisel kujul:

$$a = a_0 e^{-\frac{\lambda}{T} t}.$$

Ajavahemikus τ , mille jooksul amplituud väheneb e korda,

sooritab süsteem $N_e = \tau/T$ võnget. Tingimusest $e^{-\frac{\lambda}{T} \tau} = e^{-1}$ saame $\lambda \frac{\tau}{T} = \lambda N_e = 1$. Järelikult on sumbuvaate logaritmiline dekrement

pöörd suurus võngete arvust, mida süsteem sooritab ajavahemikus, kus amplituud väheneb e korda.

Võnkumise süsteemi iseloomustamiseks kasutatakse sageli suurust

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e, \quad (73.13)$$

mida nimetatakse võnkumise süsteemi hüvete guriks. Nagu selgub definitsioonist, on hüvete gur võrdeline võngete arvuga N_e , mida süsteem sooritab ajavahemikus τ , kus võnkumiste amplituud väheneb e korda.

Määrame sumbuvaate võnkumise teostava süsteemi impulsi. Diferentseerinud funktsiooni (73.10) aja järgi ning korrutanud saadud tulemuse massiga m , saame

$$p = m\dot{x} = -ma_0 e^{-\beta t} [\beta \cos(\omega t + \alpha) + \omega \sin(\omega t + \alpha)].$$

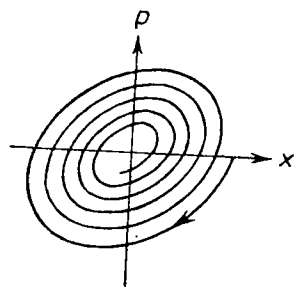
Selle avaldise võib esitada järgmisel kujul:

$$p = p_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \psi), \quad (73.14)$$

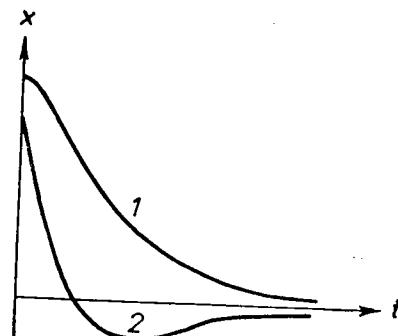
kus $p_0 = ma_0 \sqrt{\omega^2 + \beta^2} = ma_0 \omega_0$, ψ aga rahuldab tingimust

$$\tan \psi = -\frac{\omega}{\beta}.$$

Kui poleks tegurit $e^{-\beta t}$, siis, elimineerinud t võrranditest



Joon. 183



Joon. 184

(73.10) ja (73.14), nagu tegime seda § 71, saaksime koordinaatides x ja p nende telgede suhtes pööratud ellipsi võrrandi. Eksponenttegur $e^{-\beta t}$ muudab aga ellipsi spiraaliks (joon. 183). See spiraal ongi sumbuva võnkumise faasitrajektor, mis on pööratud koordinaattelgede suhtes seda rohkem, mida suurem on sumbuvustegur β .

Valemist (73.11) järeldub, et kui $\omega_0^2 - \beta^2 = 0$, on võnkumiste periood lõpmata suur, s. o. liikumine lakkab olemast perioodiline. Vastav matemaatiline analüüs näitab, et kui $\omega_0^2 - \beta^2 \ll 0$, on liikumine aperioidiline: tasakaaluasendist väljaviidud süsteem pöörduv sinna võnkumisi sooritamata tagasi. Joonisel 184 on kujutatud kaks võimalikku viisi süsteemi pöördumiseks tasakaaluasendisse aperioidilisel liikumisel. See, kumba teed mööda süsteem tasakaaluasendisse tuleb, sõltub algtingimustest. Kõveraga 2 kujutatud liikumine esineb juhul, kui süsteem hakkab liikuma hälbega x_0 iseloomustatavast asendist tasakaaluasendi poole kiirusega v_0 , mille määrab tingimus

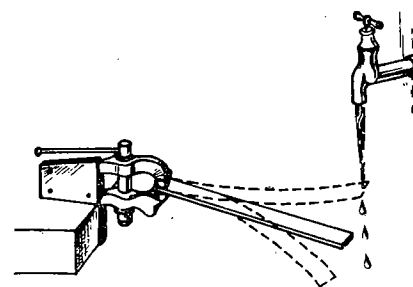
$$|v_0| > |x_0| (\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}).$$

§ 74. AUTOVÕNKUMISED

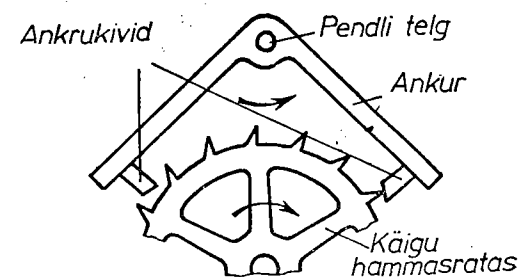
Sumbuvate võnkumiste korral kulutatakse süsteemi energiat keskkonnatahistuse ületamiseks. Kui kompenseerida seda energia kahanemist, muutuvad võnkumised sumbumatuteks. Süsteemi energia võib täiendada väljastpoolt avaldatavate tõugete arvel, kuid need tõuked peavad mõjuma süsteemile võnkumise taktis, vastasel juhul võivad nad nõrgendada võnkumisi või isegi summutada need täielikult. Võib teha nii, et võnkuv süsteem ise reguleerib seda välist mõju, kindlustades kooskõla väliste tõugete ja

süsteemi enese võnkumise vahel. Niisugust süsteemi nimetatakse autovõnkuvaks süsteemiks ning sellise süsteemi sumbumatuid võnkumisi autovõnkumisteks.

Vaatleme lihtsaima autovõnkuv süsteemi näitena joonisel 185 kujutatud seadet. Elastse painduva joonlaua üks ots on liikumatult kinnitatud. Kui viia joonlaua vaba ots tasakaaluasendist allapoole ning vabastada, hakkab joonlaud võnkuma sumbumatult. Võnkumised võib muuta sumbumatuteks, kui näiteks suunata joonlaua vabale otsale veejuga nii, et see puudutaks joonlauda selle otsa ülemises äärmises asendis. Veejoa löögid vastu joonlaua otsa taastavad hõõrdumisest tingitud võnkumisenenergia kao.



Joon. 185



Joon. 186

Teise autovõnkuv süsteemi näitena vaatleme kellamehhanismi. Kellapendel on kinnitatud samale teljele kõvera kangil — ankruga (joon. 186). Ankrutõstel on kaks vastava kujuga nukki, mida nimetatakse ankrukivideks. Käiguhammasratast püüavad pöörata kellaosuti suunas kas pommi kandev kett või üleskeeratud vedru. Kuid enamiku ajast toetub käiguhammasratast ühe hambaga vastu ühe või teise ankrukivi külgpinda ning ankrukivi libiseb pendli võnkumisel mööda hamba pinda. Ainult nendel hetkedel, mil pendel on keskasendi lähedal, ei takista kivid hammasrata liikumist ning see pöörduv, lükates ankrut hambaga, mille tipp libiseb mööda kivi kaldu lõigatud otspinda. Pendli täisvõnke (perioodi) kestel pöörduv käiguhammasratast kahe hamba võrra, kusjuures kumbki ankrukivi saab ühe tõuke. Nende tõugetega täiendatakse hõõrdumisest tingitud energiakadu ülestõstetud pommi või üleskeeratud vedru energia arvel.

§ 75. SUNDVÖNKUMISED

Sundvõnkumisteks nimetatakse võnkumisi, mida võnkumisvõimeline süsteem sooritab perioodiliselt muutuva välisjõu mõjul (nimetame seda edaspidi sundivaks jõuks). Muutugu sundiv jõud harmooniliselt:

$$f = F_0 \cos \omega t. \quad (75.1)$$

Liikumisvõrrandi koostamisel peab peale sundiva jõu arvestama ka neid jõudusid, mis mõjuvad süsteemis selle vaba võnkumise korral, s. o. kvaasielastset jõudu ja keskkonnatakistust. Oletanud, et võnked on küllalt väikesed, loeme takistusjõu endiselt võrdeliseks kiirusega. Nii saame liikumisvõrrandi järgmisel kujul:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t,$$

Jaganud selle võrrandi massiga m ning viinud x ja \dot{x} sisaldavad liikmed vasakule poole, saame teist järku lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (75.2)$$

kus $f_0 = \frac{F_0}{m}$, $\beta = \frac{r}{2m}$ on sumbuvaltegur, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ on süsteemi võnkumise omasagedus.

Diferentsiaalvõrrandite teooriast on teada, et mittehomogeense võrrandi lahend on võrdne vastava homogeense võrrandi üldlahendi ja mittehomogeense võrrandi erilahendi summaga. Homogeense võrrandi üldlahendit me juba tunneme (vt. funktsiooni (73.10), mis on võrrandi (73.2) üldlahendiks). See omab kuju

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha'), \quad (75.3)$$

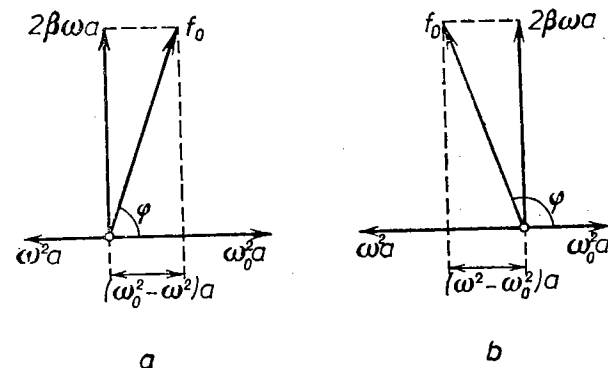
kus $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, a_0 ja α' aga on suvalised konstandid.

Jääb üle leida veel võrrandi (75.2) erilahend, mis ei sisalda suvalisi konstante. Oletame, et see lahend omab järgmist kuju:

$$x = a \cos(\omega t - \varphi) \quad (75.4)$$

(antud juhul on mugavam tähistada algfaasi α asemel $-\varphi$ -ga). Vektordiagrammi abil (vt. § 68 ja 69) on kerge veenduda, et meie oletus on õige. Samuti saame määrata ka a ja φ väärtused, mille puhul funktsioon (75.4) rahuldab võrrandit (75.2). Diferentseerides (75.4) aja järgi, saab võrrandi (75.2) kaks esimest liiget avaldada järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} 2\beta\dot{x} &= -2\beta\omega a \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= 2\beta\omega a \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (75.5)$$



Joon. 187

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega^2 a \cos(\omega t - \varphi) = \\ &= \omega^2 a \cos(\omega t - \varphi + \pi). \end{aligned} \quad (75.6)$$

Nagu võrrandist (75.2) näha, on harmooniline võnkumine $f_0 \cos \omega t$ kolme sama sagedusega ω võnkumise summa. Need on: võnkumine (75.6), võnkumine (75.5) ning võnkumine $\omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos(\omega t - \varphi)$. Kui kujutada viimast võnkumist vektorina pikkusega $\omega_0^2 a$, mis on suunatud paremale (joon. 187), siis tuleb kujutada võnkumist (75.5) vektorina pikkusega $2\beta\omega a$, mis on pööratud vektori $\omega_0^2 x$ suhtes vastu kellaosuti liikumist nurga $\pi/2$ võrra, võnkumist (75.6) aga vektorina pikkusega $\omega^2 a$, mille nurk vektoriga $\omega_0^2 x$ on π . Et võrrand (75.2) saaks rahuldatud, peab nimetatud kolme vektori summa ühtima võnkumist $f_0 \cos \omega t$ kujutava vektoriga. Niisugune ühtimine on võimalik vaid amplituudi a sellise väärtuse puhul, mille määrab tingimus (vt. joonist 187, a)

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 a^2 + 4\beta^2 \omega^2 a^2 = f_0^2,$$

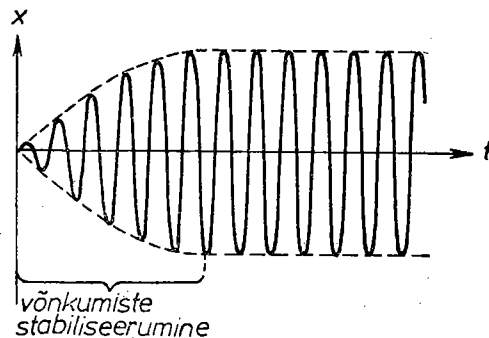
kust

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (75.7)$$

Joonis 187, a vastab juhule $\omega < \omega_0$. Määratud a juhule $\omega > \omega_0$ vastavalt jooniselt 187, b, saame sama avaldise.

Joonis 187 võimaldab määrata ka sundvõnkumise (75.4) faasihilinemise φ teda põhjustava sundiva jõu (75.1) suhtes. Joonisest järeldub, et

$$\tan \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (75.8)$$



Joon. 188

Asendanud võrrandis (75.4) a ja φ nende avaldistega (75.7) ja (75.8), saame mittehomoogeense võrrandi (75.2) erilahendi:

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (75.9)$$

Summeerides (75.9) ja (75.3), saame sundvõnkumisi sooritava süsteemi käitumist kirjeldava võrrandi (75.2) üldlahendi. Selle lahendi liige (75.3) mängib olulist osa ainult protsessi algstaadiumil, s. o. võnkumiste stabiliseerumisprotsessis (joon. 188). Aja jooksul eksponenttegi $e^{-\beta t}$ tõttu liikme (75.3) osatähtsus väheneb ja küllalt pika aja möödudes võib seda lugeda tähtsusetuks ning arvestada ainult liiget (75.9).

Seega kirjeldab funktsioon (75.9) stabiliseerunud sundvõnkumisi. Need kujutavad endast harmoonilisi võnkumisi, mille sagedus on võrdne sundiva jõu sagedusega. Sundvõnkumiste amplituud (75.7) on võrdeline sundiva jõu amplituudiga. Antud võnkumise süsteemi puhul (kindla ω_0 ja β korral) sõltub amplituud sundiva jõu sagedusest. Sundvõnkumised hilinevad faasi poolest sundiva jõu suhtes ning see hilinevuse φ sõltub samuti sundiva jõu sagedusest (vt. (75.8)).

Sundvõnkumiste amplituudi sõltuvus sundiva jõu sagedusest tingib olukorra, kus sageduse teatud väärtuse juures antud süsteemi võnkeamplituud saavutab maksimumi. Võnkumise süsteem osutub niisuguse sagedusega jõu suhtes eriti vastuvõtlikuks. Seda nähtust nimetatakse resonantsiks, vastavat sagedust aga resonantsisageduseks.

Resonantsisageduse ω_{res} määramiseks peab leidma funktsiooni (75.7) maksimumi või, mis on sama, nimetajas juure all oleva

avaldise miinimumi. Diferentseerinud selle avaldise ω järgi ning võrritanud nulliga, saame ω_{res} määrama avaldise:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0. \quad (75.10)$$

Võrrandil (75.10) on kolm lahendit: $\omega = 0$ ja $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Esimene lahend ($\omega = 0$) vastab nimetaja maksimumile. Ulejäänud kahest lahendist tuleb negatiivne kõrvale jätta, sest sel ei ole füüsikalist sisu (sagedus ei saa olla negatiivne). Nii saame resonantsisageduse üheainsa väärtuse

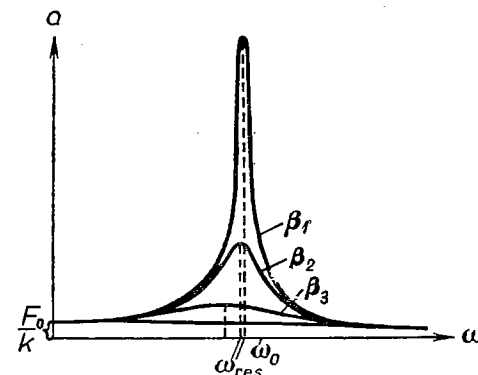
$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (75.11)$$

Asendanud valemis (75.7) ω avaldisega (75.11), saame resonantsiolukorrale vastava amplituudi:

$$a_{res} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (75.12)$$

Valemist (75.12) järeldub, et keskkonnatahistuse puudumisel kasvaks amplituud lõpmata suureks. Vastavalt valemile (75.11) ühtib resonantsisagedus samades tingimustes ($\beta = 0$) süsteemi omavõngete sagedusega ω_0 .

Sundvõnkumiste amplituudi sõltuvus sundiva jõu sagedusest (või, mis on sama, võnkumiste sagedusest) on kujutatud joonisel 189. Üksikud kõverad graafikul vastavad parameetri β eri väärtustele. Vastavalt valemitele (75.11) ja (75.12) leiame, et mida väiksem on β , seda kõrgem on kõvera a maksimum. Peale selle nihkub see maksimum β vähenedes paremale. Väga tugeva sumbumise korral ($2\beta^2 > \omega_0^2$) on resonantsisageduse avaldis imagi-



Joon. 189

naarne. See tähendab, et niisugustes tingimustes resonantsi ei esine: sageduse kasvades sundvõnkumiste amplituud kahaneb monotoonselt (vt. alumist kõverat joonisel 189). Joonisel 189 esitatud funktsiooni (75.7) parameetri β eri väärtustele vastavate graafikute kogu nimetatakse resonantsikõverateks.

Resonantsikõverate kohta võib teha veel järgmise märkuse. ω lähenedes nullile lähenevad kõik kõverad ühele ja samale nullist erinevale piirväärtusele f_0/ω_0^2 , s.o. F_0/k . See väärtus on hälve tasakaaluasendist, mille süsteem saab konstantse jõu F_0 mõjul. ω kasvades lõpmata suureks lähenevad kõik kõverad asümptootiliselt nullile, sest suure sageduse puhul muudab jõud nii kiiresti oma suunda, et süsteem ei suuda tasakaaluasendist nihkuda. Lõpuks märgime veel, et mida väiksem on β , seda tugevamini sõltub amplituud resonantsipiirkonnas sagedusest, seda «teravam» on maksimum.

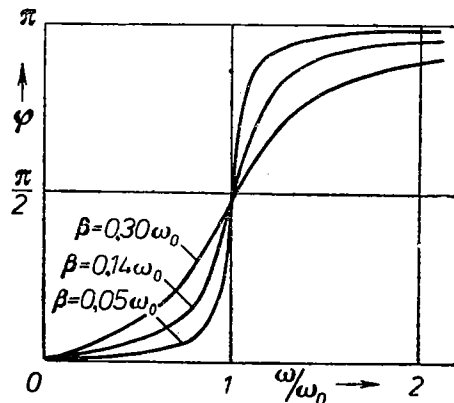
Valemist (75.12) tuleneb, et nõrga sumbumise tingimustes ($\beta \ll \omega_0$) on resonantsiolukorrale vastav amplituud

$$a_{res} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}.$$

Jagame selle võrrandi konstantse jõu $F_0 = f_0/\omega_0^2$ mõjul toimunud häälbega tasakaaluasendist x_0 . Saame

$$\frac{a_{res}}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q$$

(vt. valemit (73.13)). Seega näitab hüvetegur Q , mitu korda on resonantsiolukorrale vastav amplituud suurem süsteemi häälbest



Joon. 190

tasakaaluasendist niisama suure välisjõu mõjul, kui on sundiva jõu amplituud (see kehtib vaid nõrga sumbumise korral).

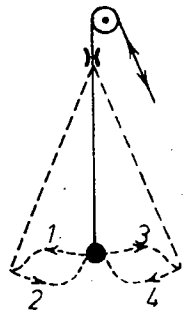
Nagu näha joonisel 187, hilinevad sundvõnkumised faasi poolt sundiva jõu suhtes ning selle hilineamise φ väärtused asuvad vahemikus 0 kuni π . Faasivahe φ sõltuvus sagedusest ω sumbete-guri β eri väärtuste puhul on kujutatud graafiliselt joonisel 190. Sagedusele ω_0 vastab $\varphi = \pi/2$. Resonantsisagedus on väiksem omavõnkesagedusest (vt. (75.11)). Järelikult on resonantsi-hetkel $\varphi < \pi/2$. Nõrga sumbumise korral $\omega_{res} \approx \omega_0$ ning φ väärtuseks resonantsiolukorras võib lugeda $\pi/2$.

Resonantsinähtust on vaja arvestada masinate ning mitmesuguste ehitiste konstrueerimisel. Nende seadmete omavõnkesagedus ei tohi mingil tingimusel olla lähedane võimalike välismõjude sagedusele. Nii näiteks laeva korpuse või lennuki tiibade omavibratsiooni sagedus peab tugevasti erinevama nende võnkumiste sagedusest, mis võivad tekkida laeva kruvi või lennuki propelleri pöörlemisel. Vastasel juhul tekivad vibratsioonid, mis võivad esile kutsuda katastroofi. Teatakse juhte, kus on purunenud sillad, kui nendest on üle marssinud sõdurite kolonn. Selle põhjuseks on olnud silla omavõngete ja kolonni sammu sageduste lähedus. Samas aga osutub resonantsinähtus sageli kasulikuks, eriti akustikas, raadiotehnikas jm.

§ 76. PARAMEETRILINE RESONANTS

Eelnevas paragrahvis uuritud juhul tingis väljastpoolt rakendatud sundiv jõud otseselt süsteemi häälbega tasakaaluasendist. Selgub, et on olemas teine välise mõju vorm, mille abil saab süsteemi tugevasti võnkuma panna. Selleks muudetakse perioodiliselt, võnkumise taktis, süsteemi mingit parameetrit, mistõttu nähtust ennast nimetatakse parameetriliseks resonantsiks.

Võtame näiteks lihtsaima pendli — niidi otsas rippuva kuulikese. Kui muuta perioodiliselt pendli pikkust l , suurendades seda hetkedel, mil pendel on äärmistes asendites, ning vähendades tasakaaluasendi läbimise ajal (joon. 191), hakkab pendel väga tugevasti võnkuma. Pendli energia suureneb niisugusel juhul selle töö arvel, mis teevad niidile mõjuvad välisjõud. Niidi tõmme pendli võnkudes muutub: ta on väiksem pendli äärmistes asendites, kui kiirus on null, ning suurem tasakaaluasendi läbimisel, kui pendli kiirus on maksimaalne. Seepärast osutub välisjõu negatiivne töö pendli pikendamisel suuruse poolest väiksemaks kui positiivne töö, mida tehakse pendli lühendamisel. Lõpptulemusena on perioodi kestel sooritatud välisjõu töö positiivne.



Joon. 191