Kolmas peatükk

TÖÖ JA ENERGIA

§ 24. TÖÖ

Oletame, et mingil trajektooril liikuvale kehale mõjub jõud **f** ning see keha läbib tee pikkusega s. Jõud **f** kas muudab keha kiirust, tekitades teatud kiirenduse, või kompenseerib mõne teise liikumist takistava jõu (või jõudude) mõju. Jõu **f** mõju teel pikkusega s iseloomustatakse suurusega, mida nimetatakse tööks.

Töö on skalaarne suurus, mis võrdub jõu rakenduspunkti poolt läbitud teepikkuse s korrutisega selle jõu liikumisesuunalise projektsiooniga f_s:

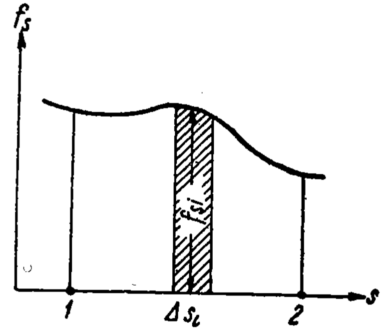
$$A=f_s s. \qquad (24.1)$$

Avaldis (24.1) kehtib tingimusel, et jõu projektsioon liikumise suunal (s. o. kiiruse suunal) f_s jääb muutumatuks. See peab paika ka siis, kui keha liigub mööda sirget ning suuruse poolest muutumatu jõud f moodustab selle sirgega püsiva nurga α. Et $f_s=f\cos\alpha$, siis võib avaldisele (24.1) anda järgmise kuju:

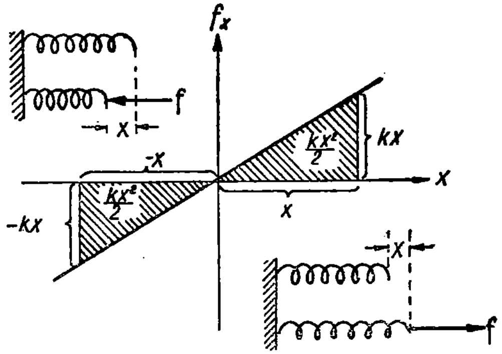
$$A=fs\cos\alpha. \qquad (24.2)$$

Töö on algebraline suurus. Kui jõud ja liikumise suund moodustavad teravnurga ($\cos\alpha>0$), on töö positiivne. Kui nurk α on nürinurk ($\cos\alpha<0$), on töö negatiivne. Kui $\alpha=\pi/2$, siis on töö võrdne nulliga. Viimasest asjaolust ilmneb eriti selgesti, et töö mõiste mehaanikas erineb oluliselt tavalisest ettekujutusest tööst. Tavaliste arusaamade järgi kaasneb iga jõupingutusega, näiteks lihaste pingutamisega, töö tegemine. Nii näiteks teeb pakikandja tööd, kui ta seisab paigal, rasked pakid käes, ning seda enam teeb ta tööd, kandes neid pakke mööda horisontaalset teed. Ent töö kui füüsikaline suurus on neil puhkudel võrdne nulliga.

Kui jõu liikumisesuunaline projektsioon ei jää liikumise kestel konstantseks, tuleb töö arvutamiseks jagada tee s elementaarlõikudeks Δs, võttes viimased nii väikesed, et iga niisuguse lõigu läbimisel võiks f_s lugeda jäävaks. Siis igal elementaarlõigul Δs tehtud töö



Joon. 52



Joon. 53

$$\Delta A=f_s\Delta s,$$

töö kogu teel s aga saame arvutada kui elementaartööde summa:

$$A=\sum\Delta A_i\cong\sum f_{si}\Delta s_i. \qquad (24.3)$$

Kõikide Δs_i lähenedes nullile saab ligikaudsest võrdusest (24.3) range võrdus:

$$A=\lim_{\Delta s_i\to 0}\sum f_{si}\Delta s_i=\int_s f_s ds.\text{[1]} \qquad (24.4)$$

Joonisel 52 on kujutatud f_s sõltuvus punkti asukohast trajektooril (horisontaalset telge võib nimetada s-teljeks; selle telje lõik punktide *1* ja *2* vahel on võrdne tee pikkusega). Jooniselt nähtub, et elementaartöö ΔA_i on arvuliselt võrdne viirutatud riba pindalaga, teelõigul punktist *1* punktini *2* sooritatud töö aga on arvuliselt võrdne kujundi pindalaga, mida piiravad kõver f_s, vertikaalsirged *1* ja *2* ning telg s.

Leiame töö, mida tehakse vedru venitamisel, kui see allub Hooke'i seadusele. Olgu venitamine nii aeglane, et vedrule mõjuvat jõudu võib igal hetkel lugeda võrdseks elastsusjõuga $f=kx$, kus x on vedru pikenemine. Jõud mõjub nihkumise suunas, seega $f_x=f$. Jõu rakenduspunkti poolt läbitud tee on x (joon. 53). Nagu järeldub jooniselt 53, on pikenemise x tekitamiseks vajalik töö

$$A=\frac{kx^2}{2}. \qquad (24.5)$$

Vedru kokkusurumiseks x võrra tehakse samasugune hulk samamärgilist tööd, nagu tehti vedru väljavenitamisel. Jõu projektsioon f_x on sel juhul negatiivne (vedrule mõjuv jõud on suunatud paremalt vasakule, x kasvab aga vasakult paremale (vt.

[1] Arutluste käik on antud juhul samasugune kui teepikkuse arvutamisel ebaühtlase liikumise korral (vt. § 4).

joon. 53)), kõik Δx on samuti negatiivsed, mistõttu $f_x \Delta x$ on positiivne.

Paneme tähele, et töö, mida sooritab elastsusjõud, s. o. jõud, millega vedru mõjutab teda deformeerivat keha, on nii venitamisel kui ka kokkusurumisel võrdne $-kx^2/2$, sest elastusjõud on igal hetkel võrdvastupidine deformatsiooni tekitava jõuga.

Töö ühikud. Töö ühikuks on töö, mille sooritab liikumise suunas mõjuv ühiku suurune jõud ühikulise pikkusega teel.

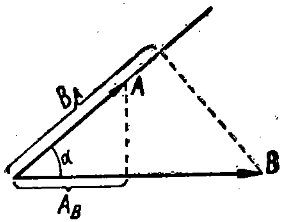
1) SI-s on tööühikuks džaul (J); see on töö, mida teeb jõud 1 njuuton 1 meetri pikkusel teel;

2) CGS-süsteemis on tööühikuks erg; see on töö, mille sooritab jõud 1 düün teel pikkusega 1 sentimeeter;

3) MkGS-süsteemi tööühik on kilogramm-meeter (kGm); see on töö, mille sooritab jõud 1 kG teel pikkusega 1 meeter.

Tööühikute vahel valitsevad järgmised seosed:

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N}\cdot 1\ \mathrm{m} = 10^5\ \mathrm{dyn}\cdot 10^2\ \mathrm{cm} = 10^7\ \mathrm{erg};$$
$$1\ \mathrm{kGm} = 1\ \mathrm{kG}\cdot 1\ \mathrm{m} = 9{,}81\ \mathrm{N}\cdot 1\ \mathrm{m} = 9{,}81\ \mathrm{J}.$$



Joon. 54

Vektorite skalaarkorrutis. Töö avaldise võib esitada jõuvektori ja nihkevektori skalaarkorrutisena.

Kahe vektori **A** ja **B** skalaarkorrutiseks nimetatakse skalaari, mis on võrdne nende vekorite moodulite ja nendevahelise nurga α koosinuse korrutisega (joon. 54). Sümboolselt kirjutatakse skalaarkorrutis kujul **AB** ilma igasuguse märgita vektorite sümbolite vahel.[1]

Seega on skalaarkorrutis definitsiooni kohaselt

$$\mathbf{AB} = AB\cos\alpha. \qquad (24.6)$$

Kui α on teravnurk, siis on **AB** suurem kui null, nürinurkse α korral väiksem nullist ning vastastikku risti olevate vektorite puhul ($\alpha = \pi/2$) võrdne nulliga.

Vektori ruudu all mõistetakse vektori skalaarkorrutist iseenesega:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = AA\cos 0 = A^2 \qquad (24.7)$$

(vektori vektorkorrutis iseenesega võrdub nulliga). Järelikult on vektori ruut võrdne tema mooduli ruuduga.

Definitsioonist järeldub, et skalaarkorrutis ei sõltu tegurite järjekorrast, seega on skalaarkorrutis, erinevalt vektorkorrutisest, kommutatiivne.

Avaldisele (24.6) võib anda järgmise kuju:

---

[1] Vähem kasutatakse tähistusi $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ ja $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

$$\mathbf{AB} = AB\cos\alpha = A(B\cos\alpha) = B(A\cos\alpha).$$

Jooniselt 54 nähtub, et $B\cos\alpha = B_A$ on võrdne vektori **B** projektsiooniga vektori **A** suunal; analoogiliselt $A\cos\alpha = A_B$ on võrdne vektori **A** projektsiooniga vektori **B** suunal. Seepärast saab skalaarkorrutisele anda ka teise definitsiooni: kahe vektori skalaarkorrutiseks nimetatakse skalaari, mis on võrdne ühe vektori mooduli korrutisega teise vektori projektsiooniga esimese suunal:

$$\mathbf{AB} = A_B B = AB_A. \qquad (24.8)$$

Vektorite summa projektsioon on võrdne liidetavate vektorite projektsioonide summaga. Siit järeldub, et

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}+\ldots) = A(\mathbf{B}+\mathbf{C}+\ldots)_A = A(B_A+C_A+\ldots) =$$
$$= AB_A + AC_A + \ldots = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}+\ldots$$

Seega on vektorite skalaarkorrutis distributiivne: mingi vektori **A** korrutis mitme vektori summaga on võrdne summaga, mis koosneb vektori **A** korrutisest iga liidetava vektoriga eraldi.

Kasutades vektorite skalaarkorrutist, võib töö avaldise (24.4) kirjutada järgmisel kujul:

$$A = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum \mathbf{f}_i \Delta \mathbf{s}_i = \int_s \mathbf{f}\,d\mathbf{s}, \qquad (24.9)$$

kus $\Delta\mathbf{s}$ all mõistetakse elementaarnihke vektorit, mida me varem tähistasime $\Delta\mathbf{r}$ (elementaarnihke moodul $|\Delta\mathbf{r}|$ on piirjuhul võrdne elementaarteega Δs (vt. § 3)).

Mõjugu kehale üheaegselt mitu jõudu, mille resultant $\mathbf{f} = \sum_k \mathbf{f}_k$. Vektorite skalaarkorrutise distributiivsusest järeldub, et töö ΔA, mille sooritab resultantjõud teel Δs, saab arvutada valemist

$$\Delta A = (\sum_k \mathbf{f}_k)\Delta\mathbf{s} = \sum_k (\mathbf{f}_k \Delta\mathbf{s}) = \sum_k \Delta A_k,$$

seega on mitme jõu resultandi töö võrdne iga jõu poolt eraldi sooritatud tööde algebralise summaga.

Elementaarnihke $\Delta\mathbf{s}$ võib esitada kujul

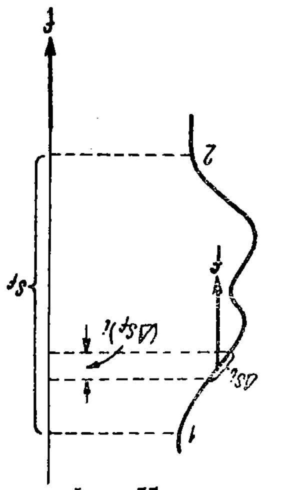
$$\Delta\mathbf{s} = \mathbf{v}\Delta t.$$

Seepärast saab valemile (24.9) anda kuju

$$A = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum \mathbf{f}_i \mathbf{v}_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}\mathbf{v}\,dt. \qquad (24.10)$$

Vastavalt seosele (24.8) $f_s \Delta s = f\Delta s_f$, kus Δs_f on elementaarnihke projektsioon jõu suunal. Seepärast saab töö avaldada järgmiselt:

$$A = \lim_{(\Delta s_f)_i \to 0} \sum f_i (\Delta s_f)_i = \int_s f ds_f. \quad (24.11)$$



Joon. 55

Kui jõu suurus ega suund ei muutu (joon. 55), siis võib valemis (24.9) tuua vektori **f** integraali märgi ette, mille tulemusena töö avaldis võtab kuju

$$A = \mathbf{f} \int d\mathbf{s} = \mathbf{fs} = f s_f, \quad (24.12)$$

kus **s** on nihkevektor, s_f aga tema projektsioon jõu suunal.

§ 25. VÕIMSUS

Praktikas on tähtis mitte üksnes sooritatud töö hulk, vaid ka aeg, mille kestel töö tehti. Seepärast kasutatakse tööd tegevate mehhanismide iseloomustamiseks suurust, mis näitab, kui palju tööd sooritatakse ajaühiku kestel. Seda nimetatakse v õ i m s u s e k s. Seega on võimsus W suurus, mis võrdub töö ΔA ja tema sooritamiseks kulunud aja Δt suhtega:

$$W = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (25.1)$$

Kui mistahes väikeste võrdsete ajavahemike Δt kestel sooritatud tööhulgad ΔA on erinevad, siis on tegemist ajas muutuva võimsusega. Sel juhul võetakse vaatluse alla võimsuse hetkväärtus

$$W = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}. \quad (25.2)$$

Juhul kui võimsuse hetkväärtus (25.2) ei ole konstantne, annab avaldis (25.1) võimsuse keskmise väärtuse ajavahemikus Δt.

Vastaku ajavahemikule dt jõu rakenduspunkti nihe $d\mathbf{s}$. Ajavahemikus dt sooritatud elementaartöö dA on siis

$$dA = \mathbf{f} d\mathbf{s}$$

ning võimsuse saame kujul

$$W = \frac{dA}{dt} = \mathbf{f} \frac{d\mathbf{s}}{dt}.$$

Kuid $\frac{d\mathbf{s}}{dt}$ on kiirusvektor **v**. Järelikult on võimsus võrdne jõuvektori ja jõu rakenduspunkti kiiruse vektori skalaarkorrutisega:

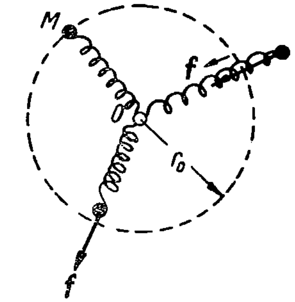
$$W = \mathbf{fv}. \quad (25.3)$$

Võimsuse ühikud. Võimsuse ühikuks võetakse niisugune võimsus, mille puhul ajaühiku (s) kestel sooritatakse ühikuline töö (J või erg). SI-s on võimsusühikuks vatt (W), s. o. džaul sekundis (J/s). CGS-süsteemi võimsusühikul (erg/s) erilist nimetust ei ole. 1 W = 10^7 erg/s.

MkGS-süsteemis on võimsusühikuks hobujõud (hj), mis võrdub 75 kilogramm-meetriga sekundis. 1 hj = 736 W.

§ 26. POTENTSIAALNE JÕUVÄLI. KONSERVATIIVSED JA MITTEKONSERVATIIVSED JÕUD

Kui keha on asetatud niisugustesse tingimustesse, et igas ruumipunktis mõjutavad teised kehad teda jõuga, mis muutub seaduspäraselt ühest punktist teise, siis öeldakse, et see keha asub jõudude väljas. Nii näiteks maapinna lähedal asuv keha on raskusjõudude väljas, sest igas ruumipunktis mõjub talle vertikaalselt allapoole suunatud jõud $P = mg$.

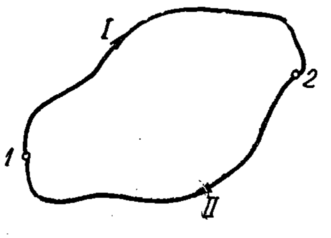


Joon. 56

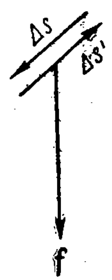
Teise näitena vaatleme vedru abil mingi tsentri O külge «seotud» keha M (joon. 56). Vedru üks ots saab pöörelda šarniiril liikumatu punkti O ümber suvalises suunas, teine ots on kinnitatud keha M külge. Igas ruumipunktis mõjub kehale radiaalne, s. o. tsentrit O ja keha M läbivat sirget mööda suunatud jõud

$$f = -k(r - r_0), \quad (26.1)$$

kus r on keha kaugus tsentrist O, r_0 — deformeerimata vedru pikkus, k — võrdetegur. Kui $r > r_0$ (vedru on välja venitatud), siis on jõud suunatud tsentri poole ning on negatiivne (jõu ja raadiusvektori **r** suunad on vastupidised); kui $r < r_0$ (vedru on kokku surutud), siis on jõud suunatud tsentrist väljapoole ning on positiivne. Vaadeldav jõuväli on erijuht nn. tsentraalsest jõuväljast, s. o. väljast, kus kõigi mõjuvate jõudude mõjusirged läbivad mingit tsentrit ning jõudude suurused sõltuvad ainult vastavate punktide ja tsentri vahelisest kaugusest ($f = f(r)$).



Joon. 57



Joon. 58

Raskusjõudude väli on samuti tsentraalse jõuvälja erijuht.

Toodud näidetele on iseloomulik, et kehale mõjuvad jõud sõltuvad ainult keha asukohast ruumis (täpsemalt, keha asukohast temale mõjuvate teiste kehade suhtes) ega sõltu keha kiirusest. Jõudude puhul, mis sõltuvad ainult keha asukohast, võib juhtuda, et nende töö ei olene vaadeldava keha poolt läbitud teest, vaid ainult tema lähte- ja lõppasukohast ruumis. Niisugusel juhul nimetatakse jõuvälja p o t e n t s i a a l s e k s ning jõudusid endid k o n s e r v a t i i v s e t e k s. Jõudusid, mille töö sõltub keha poolt läbitud teest, nimetatakse m i t t e k o n s e r v a t i i v s e t e k s.

Konservatiivsete jõudude töö mistahes kinnise tee korral on null. Tõepoolest, jaotame potentsiaalses väljas liikuva keha kinnise tee kahte ossa: tee *I*, mida mööda keha läheb punktist *1* punkti *2*, ning tee *II*, mida mööda ta liigub punktist *2* punkti *1*, kusjuures punktid *1* ja *2* on valitud täiesti suvaliselt (joon. 57). Kogu tee ulatuses sooritatud töö koosneb kahest osast:

$$A=(A_{12})_{\mathrm{I}}+(A_{21})_{\mathrm{II}}. \qquad (26.2)$$

Tõestame, et ühel teelõikudest, näiteks lõigul *II*, on keha üleminekul punktist *1* punkti *2* tehtud töö võrdne tööga, mis sooritatakse samal teelõigul keha vastassuunalisel üleminekul punktist *2* punkti *1*, ainult töö märk on vastupidine. Vaatleme trajektoori lõiku Δs (joon. 58). Et potentsiaalses väljas sõltub jõud $\mathbf{f}$ ainult keha asukohast ruumis, kuid ei sõltu keha liikumise olukorrast (näiteks liikumise suunast), siis on elementaartöö teel Δs keha liikumisel ühes suunas $\Delta A=\mathbf{f}\Delta\mathbf{s}$, keha liikumisel vastassuunas $\Delta A'=\mathbf{f}\Delta\mathbf{s}'$. Et $\Delta\mathbf{s}'=-\Delta\mathbf{s}$, siis $\Delta A'=-\Delta A$. Niisugune võrdus kehtib iga elementaarse teelõigu korral, järelikult kehtib ta kogu tee ulatuses, nii et

$$(A_{21})_{\mathrm{II}}=-(A_{12})_{\mathrm{II}}. \qquad (26.3)$$

Kasutades seda tulemust, võime võrduse (26.2) kirjutada järgmisel kujul:

$$A=(A_{12})_{\mathrm{I}}-(A_{12})_{\mathrm{II}}. \qquad (26.4)$$

Kuid potentsiaalses jõuväljas ei sõltu töö teest, s. o. $(A_{12})_{\mathrm{I}}=(A_{12})_{\mathrm{II}}$. Järelikult võrdub avaldis (26.4) nulliga, mida oligi vaja tõestada.

Kui mingite jõudude töö mistahes kinnisel teel on null, siis nähtavasti ei sõltu see töö teest (seda saab tõestada eelnevaga vastupidise tõestuskäiguga). Seepärast võib potentsiaalset jõuvälja defineerida kui niisuguste jõudude välja, mille töö kinnisel teel on null. Kuna potentsiaalses väljas on töö kinnisel teel null, siis osa tee ulatuses teevad jõud positiivset, teise osa ulatuses aga negatiivset tööd. Valemi (24.10) alusel on hõõrdejõudude töö ajavahemikus Δt

$$\Delta A=\mathbf{f}\mathbf{v}\Delta t=-fv\Delta t,$$

sest vektorid $\mathbf{f}$ ja $\mathbf{v}$ on alati vastassuunalised.[1] Järelikult on hõõrdejõudude töö alati negatiivne ning kinnise tee korral nullist erinev. Seega kuuluvad hõõrdejõud mittekonservatiivsete jõudude hulka.

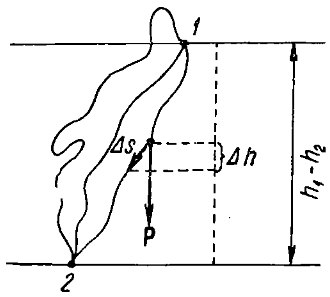
Tõestame, et raskusjõudude väli on potentsiaalne. Igas trajektoori punktis mõjub kehale ühesugune, vertikaalselt alla suunatud jõud $P=mg$ (joon. 59). Valemi (24.12) alusel on töö

$$A=P(h_1-h_2)=mg(h_1-h_2). \qquad (26.5)$$

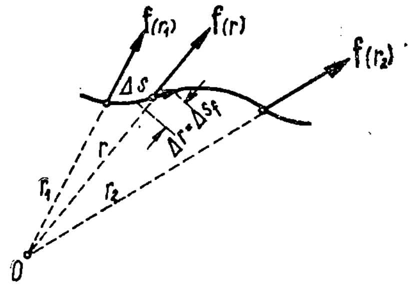
Sellest avaldisest nähtub, et töö ei sõltu teest, millest omakorda järeldub, et raskusjõudude väli on potentsiaalne.

Tsentraalne jõuväli on samuti potentsiaalne. Elementaartöö lõigul Δs (joon. 60)

$$\Delta A=f(r)\Delta s_f.$$



Joon. 59



Joon. 60

[1] Siin peetakse silmas liikuva ja liikumatu keha vahelist hõõrdumist taustsüsteemi suhtes. Mõnel juhul võib hõõrdejõudude töö osutuda ka positiivseks. Niisugune on olukord näiteks siis, kui hõõrdejõud esineb antud keha ja mõne teise temaga samas suunas, kuid suurema kiirusega liikuva keha vahel.

Kuid teelõigu Δs projektsioon jõu suunal, s. o. raadiusvektori $\mathbf{r}$ suunal, on antud kohas võrdne keha ja punkti O vahekauguse juurdekasvuga $\Delta r : \Delta s_f = \Delta r$. Seepärast

$$\Delta A = f(r)\Delta r.$$

Kogu tee ulatuses sooritatud töö

$$A = \sum \Delta A_i = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_{r=r_1}^{r=r_2} f(r_i)\Delta r_i = \int_{r_1}^{r_2} f(r)\,dr.$$

Viimane avaldis sõltub ainult funktsiooni $f(r)$ kujust ning r_1 ja r_2 väärtustest, mitte aga trajektoori kujust, seepärast on tsentraalne jõuväli ühtlasi potentsiaalne.

§ 27. ENERGIA. ENERGIA JÄÄVUSE SEADUS

Nagu näitavad katsed, on kehad sageli võimelised tegema tööd. Füüsikalist suurust, mis iseloomustab keha või kehade süsteemi töötegemise võimet, nimetatakse e n e r g i a k s. Keha energia võib olla tingitud kahesugustest põhjustest: esiteks, keha liikumisest teatud kiirusega, ning teiseks, keha asumisest potentsiaalses jõuväljas. Esimest liiki energiat nimetatakse k i n e e t i l i s e k s, teist liiki — p o t e n t s i a a l s e k s e n e r g i a k s. Lühidalt võib öelda, et kineetiline energia on liikumisenergia, potentsiaalne aga asendienergia.

Kineetiline energia. Mõjutagu keha *1* (ainepunkt), mille mass on m ning mis liigub kiirusega $\mathbf{v}$, temaga kokkupuutuvat keha *2* jõuga $\mathbf{f}$ (joon. 61). Ajavahemiku dt kestel nihkub jõu rakenduspunkt $d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt$ võrra, mistõttu keha *1* teeb tööd

$$dA = \mathbf{f}d\mathbf{s} = \mathbf{f}\mathbf{v}dt. \tag{27.1}$$

Ilmselt teeb keha *1* tööd selle energiavaru arvel, mis tal on liikumise tõttu, s. o. kineetilise energia varu T arvel (kui keha ei liiguks, oleks nihe $d\mathbf{s}$ null ning samuti oleks null ka töö dA). Seepärast võib keha *1* töö lugeda võrdseks tema kineetilise energia kahanemisega[1]:

[1] Mingi suuruse a muutumist võib iseloomustada kas tema juurdekasvu või kahanemisega. Suuruse a juurdekasv, mida tähistame Δa, on selle suuruse lõpp-väärtuse a_2 ja algväärtuse a_1 vahe:

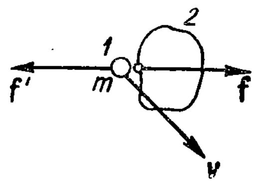
$$\text{juurdekasv} = \Delta a = a_2 - a_1.$$

Suuruse a kahanemiseks nimetatakse selle suuruse algväärtuse a_1 ja lõppväärtuse a_2 vahet:

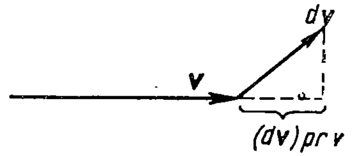
$$\text{kahanemine} = a_1 - a_2 = -\Delta a.$$

Suuruse kahanemine on võrdne tema vastandmärgiga võetud juurdekasvuga.

Juurdekasv ja kahanemine on algebralised suurused. Kui $a_2 > a_1$, on juurdekasv positiivne, kahanemine aga negatiivne. Juhul kui $a_2 < a_1$, on juurdekasv negatiivne ning kahanemine positiivne.



Joon. 61



Joon. 62

$$dA = -dT.$$

Võtnud arvesse avaldise (27.1), leiame, et

$$dT = -\mathbf{f}\mathbf{v}dt. \tag{27.2}$$

Newtoni kolmanda seaduse alusel mõjutab keha *2* keha *1* jõuga $\mathbf{f}' = -\mathbf{f}$, mistõttu keha *1* kiirus saab ajavahemikus dt juurdekasvu

$$d\mathbf{v} = \frac{1}{m}\mathbf{f}'dt = -\frac{1}{m}\mathbf{f}dt.$$

Korrutanud viimase võrduse mõlemad pooled skalaarselt vektoriga $m\mathbf{v}$, saame:

$$m\mathbf{v}d\mathbf{v} = -\mathbf{f}\mathbf{v}dt. \tag{27.3}$$

Võrreldes seoseid (27.3) ja (27.2), saame dT jaoks avaldise:

$$dT = m\mathbf{v}d\mathbf{v}. \tag{27.4}$$

Vastavalt valemile (24.8) saab skalaarkorrutisele $\mathbf{v}d\mathbf{v}$ anda kuju $v|d\mathbf{v}|\cos\alpha = v(d\mathbf{v})_{pr\,v}$[1], kus $(d\mathbf{v})_{pr\,v}$ on vektori $d\mathbf{v}$ projektsioon vektori $\mathbf{v}$ sihil.

Jooniselt 62 selgub, et $(d\mathbf{v})_{pr\,v}$ on võrdne kiiruse mooduli juurdekasvuga dv. Seepärast saab avaldise (27.4) kirjutada järgmisel kujul:

$$dT = mvdv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \tag{27.5}$$

Siit järeldub[2], et kui ainepunkt massiga m liigub kiirusega v, siis tema kineetiline energia

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{27.6}$$

Korrutanud avaldise (27.6) lugeja ja nimetaja massiga m

[1] Seda avaldist ei tohi kirjutada kujul $v \cdot dv \cdot \cos\alpha$, sest üldiselt $|d\mathbf{v}| \neq dv$.

[2] Võrrandi (27.5) integreerimine annab $T = \frac{mv^2}{2} + \text{const}$. Kuid füüsikalistest kaalutlustest selgub, et kui $v = 0$, on kineetiline energia T samuti null, millest järeldub, et konstandi võib lugeda nulliks.

ning võtnud arvesse, et mv on keha impulss p, saame kineetilise energia avaldisele anda uue kuju:

$$T=\frac{p^2}{2m}. \qquad (27.7)$$

On oluline märkida, et keha nihutamisel tehtud töö A' on võrdne selle keha kineetilise energia juurdekasvuga $\Delta T=T_2-T_1$. Selle tõestuseks kirjutame elementaartöö avaldise

$$dA'=\mathbf{f}'\mathbf{v}dt$$

($\mathbf{f}'$ on tööd teinud jõud, $\mathbf{v}$ — keha kiirus). Asendame nüüd korrutise $\mathbf{f}'dt$ seose (22.4) alusel $d\mathbf{p}=md\mathbf{v}$-ga ning saame:

$$dA'=\mathbf{f}'\mathbf{v}dt=m\mathbf{v}d\mathbf{v}=mvdv=d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=dT.$$

Selle avaldise integreerimine annab

$$A'=T_2-T_1. \qquad (27.8)$$

Avaldisest (27.8) järeldub, et energia dimensioon on sama mis tööl. See annab võimaluse mõõta energiat samades ühikutes, mida kasutatakse töö mõõtmisel.

Potentsiaalne energia. Vaatleme potentsiaalses jõuväljas asuvat keha (ainepunkti). Viime välja iga punktiga, mida iseloomustab raadiusvektor $\mathbf{r}$, vastavusse mingi funktsiooni $U(\mathbf{r})$ väärtuse, tehes seda järgmisel viisil. Mingi lähtepunkti *0* jaoks võtame funktsiooni suvalise väärtuse U_0. Et saada funktsiooni väärtust U_1 mingis punktis *1*, liidame U_0-ga töö A_{10}, mille sooritavad välja jõud, viies keha punktist *1* punkti *0*:

$$U_1=U_0+A_{10} \qquad (27.9)$$

(peame silmas, et nõnda määratud funktsioon U omab töö või energia dimensiooni). Kuna potentsiaalses jõuväljas töö ei sõltu teest (vt. § 26), siis sellisel viisil saadud väärtus U_1 on ühene.

Analoogiliselt määratakse $U(\mathbf{r})$ väärtused välja kõikide punktide puhul. Nii on $U(\mathbf{r})$ väärtus punkti *2* jaoks

$$U_2=U_0+A_{20}. \qquad (27.10)$$

Arvutame vahe U_1-U_2. Selleks lahutame avaldisest (27.9) avaldise (27.10) ning arvestame, et $A_{20}=-A_{02}$ (vt. § 26). Tulemuseks saame:

$$U_1-U_2=(U_0+A_{10})-(U_0+A_{20})=A_{10}-A_{20}=A_{10}+A_{02}.$$

Kuid summa $A_{10}+A_{02}$ väljendab tööd, mida teevad välja jõud, viies keha punkti *0* läbivat trajektoori mööda punktist *1* punkti *2*. Töö, mis sooritatakse keha viimisel punktist *1* punkti *2*, on aga sama mistahes trajektoori, sealhulgas ka punkti *0* mitteläbiva

trajektoori korral. Seepärast võib summa $A_{10}+A_{02}$ asemel kirjutada lihtsalt A_{12}. Tulemuseks saame seose:

$$U_1-U_2=A_{12}. \qquad (27.11)$$

Nii saab funktsiooni $U(\mathbf{r})$ abil määrata välja jõudude tööd keha viimisel mistahes teed mööda suvalisest punktist *1* suvalisse punkti *2*. See töö on võrdne funktsiooni $U(\mathbf{r})$ kahanemisega teel *1—2*. Viimane asjaolu annab alust tõlgendada füüsikalist suurust $U(\mathbf{r})$ kui mehaanilise energia ühte vormi, mida nimetatakse p o t e n t s i a a l s e k s energiaks.

Et väärtus U_0 on valitud suvaliselt (vt. valemit (27.9)), on potentsiaalne energia määratud aditiivse konstandi täpsusega. See asjaolu ei oma aga mingisugust tähtsust, sest kõikides füüsikalistes seostes esineb ainult U väärtuste vahe keha kahe asendi puhul. Praktiliselt võetakse U keha mingis teatud asukohas võrdseks nulliga, mõnele teisele asukohale vastavat energiat aga arvutatakse selle energia suhtes.

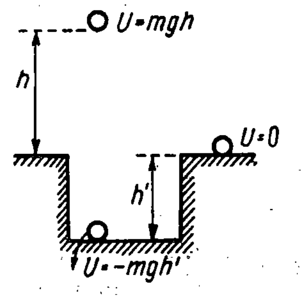
Funktsiooni $U(\mathbf{r})$ konkreetne kuju sõltub jõuvälja iseloomust. Nii näiteks raskusjõudude väljas on keha massiga m potentsiaalne energia maapinna läheduses

$$U=mgh, \qquad (27.12)$$

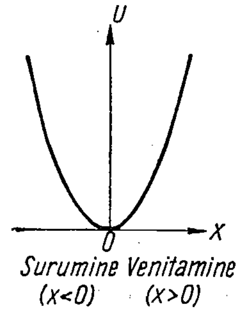
(h on kõrgus, arvates nivoost, kus $U=0$). See järeldub otseselt valemist (26.5), mis määrab raskusjõudude töö keha üleminekul nivoolt h_1 nivoole h_2.

Kuna U lähteväärtus on suvaliselt valitav, siis võib potentsiaalne energia omada ka negatiivseid väärtusi. Kui näiteks võtta maapinnal oleva keha potentsiaalne energia nulliks, siis augu põhjas sügavusel h' oleva keha potentsiaalne energia $U=-mgh'$ (joon. 63). Kineetiline energia ei saa olla negatiivne.

Ülaltoodud näites omistasime potentsiaalse energia $U=mgh$ raskusjõudude väljas asuvale kehale. Kuid rangelt võttes peab



Joon. 63



Joon. 64

potentsiaalse energia omistama süsteemile, milles kehade vahel mõjuvad teatud jõud. Nii on eelneval juhul $U=mgh$ Maast ja kehast koosneva süsteemi potentsiaalne energia. Süsteemi potentsiaalne energia sõltub kehade asendist üksteise suhtes.

Potentsiaalset energiat võib olla nii vastastikku üksteist mõjutavatest kehadest koosneval süsteemil kui ka üksikul elastselt deformeeritud kehal (näiteks kokkusurutud või väljavenitatud vedrul). Niisugusel juhul sõltub potentsiaalne energia selle keha osade vastastikusest asendist (näiteks vedru naaberkeerdude vahekaugusest).

Vastavalt valemile (24.5) on nii vedru kokkusurumiseks kui ka selle venitamiseks x võrra tarvis teha tööd $A=\frac{1}{2}kx^2$. Selle töö arvel suureneb vedru potentsiaalne energia. Järelikult, potentsiaalse energia U sõltuvus deformatsioonist x avaldub valemiga:

$$U=\frac{1}{2}kx^2. \qquad (27.13)$$

Joonisel 64 on seda sõltuvust kujutatud graafiliselt.

Kehade süsteemi mehaaniline koguenergia. Üldjuhul võib keha omada üheaegselt nii kineetilist kui ka potentsiaalset energiat. Nende energiate summa moodustab mehaanilise koguenergia. Nii näiteks kehal M massiga m, mis asub kõrgusel h maapinnast ning liigub Maa suhtes kiirusega v, on koguenergia

$$E=\frac{mv^2}{2}+mgh. \qquad (27.14)$$

Täpsemalt öeldes väljendab avaldis (27.14) süsteemi Maa—keha M koguenergiat; mgh on selle süsteemi potentsiaalne, $mv^2/2$ keha M kineetiline energia. Maa kineetiline energia on antud taustsüsteemis null, seega on alust pidada energiat (27.14) keha M energiaks.

Potentsiaalne ja kineetiline energia võivad vastastikku muunduda. Vaatleme keha vaba langemist kõrguselt h. Enne langemise algust on keha kineetiline energia null (keha on paigal), potentsiaalne energia aga mgh. Langemise lõpus liigub keha kiirusega

$$v=\sqrt{2gh} \qquad (27.15)$$

ning järelikult on tema kineetiline energia

$$T=\frac{mv^2}{2}=\frac{m(\sqrt{2gh})^2}{2}=mgh,$$

kuid see-eest on keha potentsiaalne energia kõrgusel $h=0$ null. Seega on potentsiaalne energia muundunud täielikult kineetiliseks energiaks.

Maapinnalt kiirusega v vertikaalselt üles visatud keha omab esialgu kineetilist energiat $mv^2/2$ ning potentsiaalne energia on tal null. Kaotades aegamööda kiirust, saab keha tõusta kõrguseni h, mille määrab avaldis (27.15). Kõrgusel h saab kiirus, järelikult ka kineetiline energia nulliks, kuid potentsiaalne energia muutub võrdseks kineetilise energiaga, mis kehal oli liikumise alguses.

Mõlemal juhul (nii keha langemisel kui tõusul maapinna läheduses) jääb koguenergia muutumatuks (õhutakistus keha liikumisel jäetakse arvesse võtmata). On kerge veenduda [1], et igal vahepealsel kõrgusel h' $(0<h'<h)$ on summa

$$\frac{mv'^2}{2}+mgh'$$

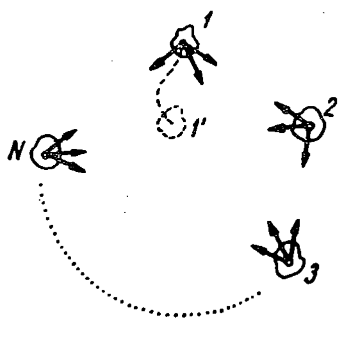
(v' on keha kiirus kõrgusel h') võrdne mgh ehk $\frac{mv^2}{2}$.

Niisuguse tulemuse saime seetõttu, et kehale mõjus ainult jõud, mis tingib potentsiaalse energia olemasolu (jõud mg on süsteemi Maa—keha sisejõud). Hoopis teistsugune on olukord siis, kui esinevad välisjõud. Nende jõudude töö tingib süsteemi koguenergia muutumise. Mõjugu näiteks maapinnal paigalolevale kehale M mingi jõud f, mis on suurem kui mg ning suunatud vertikaalselt üles (see jõud peab pärinema kehadelt, mis ei kuulu süsteemi Maa—keha M). Keha hakkab tõusma teatud kiirendusega, mistõttu kasvab nii selle keha potentsiaalne kui ka kineetiline energia, koguenergia juurdekasv on seejuures võrdne keha M tõusul sooritatud välisjõu f tööga.

Kui süsteem koosneb N kehast, mille vahel mõjuvad konservatiivsed jõud, siis selle süsteemi energia koosneb süsteemi kui terviku potentsiaalsest energiast, millele liitub süsteemi kineetiline energia; viimane omakorda on süsteemi kuuluvate kehade kineetiliste energiate summa:

$$E=U+T=U+\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2}. \qquad (27.16)$$

Energia jäävuse seadus. Vaatleme N kehast koosnevat süsteemi, kus kehade vahel mõjuvad ainult konservatiivsed jõud (joon. 65). Oletame, et keha *1* liikus mööda suvalist trajektoori asendisse *1'*. Jõud, millega teised kehad mõjutavad keha *1*, teevad sellel üleminekul tööd, mis ei sõltu keha *1* teest ning mis on



Joon. 65

[1] See on soovitav harjutamise mõttes läbi teha.

määratud ainult vaadeldava keha alg- ja lõppasendiga kõikide teiste kehade suhtes. Analoogiliselt võib arutleda ka teiste kehade korral; kui nad muudavad oma asukohta süsteemis, teevad süsteemis mõjuvad konservatiivsed jõud tööd, mille määravad vaid kehade alg- ja lõppasendid üksteise suhtes. Järelikult võib kehade igale vastastikusele asetusele (igale konfiguratsioonile) omistada teatud potentsiaalse energia U ning konservatiivsete jõudude tööd üleminekul ühelt konfiguratsioonilt teisele arvutada kui nendele konfiguratsioonidele vastavate U väärtuste vahet:

$$A_{12}=U_1-U_2. \tag{27.17}$$

Oletame, et süsteemi kehadele mõjuvad peale konservatiivsete jõudude veel välisjõud. Kõikide i-ndale kehale rakendatud jõudude tööd võib kujutada nüüd sisejõudude töö $(A_{12})_i$ ja välisjõudude töö A'_i summana. Kogutöö määrab teatavasti keha kineetilise energia juurdekasvu (vt. (27.8)). Järelikult,

$$(A_{12})_i+A'_i=(T_2)_i-(T_1)_i. \tag{27.18}$$

Summeerides avaldised (27.18) kogu süsteemi ulatuses, saame:

$$\sum(A_{12})_i+\sum A'_i=\sum(T_2)_i-\sum(T_1)_i. \tag{27.19}$$

Esimene summa avaldises (27.19) kujutab konservatiivsete jõudude tööd, mis on tehtud süsteemi üleminekul esimesest ehk algkonfiguratsioonist teise ehk lõppkonfiguratsiooni. Vastavalt avaldisele (27.17) võib seda tööd kujutada kui protsessi algusele ja lõpule vastavate potentsiaalse energia väärtuste vahet:

$$\sum(A_{12})_i=U_1-U_2.$$

Teine summa avaldise (27.19) vasakul poolel kujutab välisjõudude kogutööd. Tähistame selle A'.

Avaldise (27.19) parem pool on ilmselt kineetilise energia väärtuste vahe süsteemi lõpp- ja algolekus, s. o. T_2-T_1.

Seega võib valemile (27.19) anda kuju

$$U_1-U_2+A'=T_2-T_1.$$

Rühmitanud võrrandi liikmed vajalikul viisil, saame

$$(T_2+U_2)-(T_1+U_1)=A'.$$

Ning lõpuks, võtnud tarvitusele koguenergia tähise $E=T+U$, saame seose:

$$\Delta E=E_2-E_1=A'. \tag{27.20}$$

Seega on koguenergia juurdekasv süsteemis, kus kehade vahel mõjuvad konservatiivsed jõud, võrdne temasse kuuluvatele kehadele rakendatud välisjõudude tööga.

Kui süsteem on isoleeritud, s. o. kui puuduvad välisjõud, siis vastavalt seosele (27.20) on $\Delta E=0$, kust järeldub, et

$$E=\text{const.} \tag{27.21}$$

Valemid (27.20) ja (27.21) väljendavad mehaanika ühte põhiseadust — energia jäävuse seadust. Mehaanikas sõnastatakse see seadus alljärgnevalt: *isoleeritud süsteemis, mille kehade vahel mõjuvad ainult konservatiivsed jõud, on süsteemi mehaaniline koguenergia muutumatu.*

Süsteemi mehaaniline energia ei jää muutumatuks, kui isoleeritud süsteemis mõjuvad peale konservatiivsete jõudude ka mittekonservatiivsed, näiteks hõõrdejõud. Vaadeldes mittekonservatiivseid jõudusid kui välisjõudusid, võib kirjutada

$$E_2-E_1=A_{mittek},$$

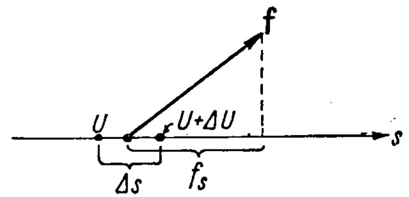
kus A_{mittek} on mittekonservatiivsete jõudude töö. Hõõrdejõudude töö on reeglina negatiivne (vt. viidet lk. 65), seepärast tingib hõõrdejõudude olemasolu isoleeritud süsteemis selle energia vähenemise aja jooksul. Hõõrdejõudude mõjul muundub mehaaniline energia teisteks, mittemehaanilisteks energiavormideks. Sellistel juhtudel kehtib jäävuse seadus üldisemal kujul: välismõjudest isoleeritud süsteemis jääb muutumatuks kõikide energiavormide summa (kaasa arvatud ka mittemehaanilised vormid).

§ 28. POTENTSIAALSE ENERGIA JA JÕU SEOS

Potentsiaalse jõuvälja igale punktile vastab ühelt poolt sellesse punkti asetatud kehale mõjuva jõuvektori **f** mingi väärtus, teiselt poolt sellele kehale omistatava potentsiaalse energia U mingi hulk. Järelikult peab jõu ja potentsiaalse energia vahel olema mingi seos. Selle leidmiseks arvutame elementaartöö ΔA, mille sooritavad välja jõud suvaliselt valitud suunas toimunud keha nihkel Δs (joon. 66). See töö

$$\Delta A=f_s\Delta s, \tag{28.1}$$

kus f_s on jõu **f** projektsioon s sihil.



Joon. 66

Et antud juhul tehakse tööd potentsiaalse energia arvel, siis on see töö võrdne potentsiaalse energia vähenemisega ΔU võrra s-telje lõigul Δs:

$$\Delta A = -\Delta U. \tag{28.2}$$

Võrreldes avaldisi (28.1) ja (28.2), saame:

$$f_s \Delta s = -\Delta U,$$

kust

$$f_s = -\frac{\Delta U}{\Delta s}. \tag{28.3}$$

Avaldis (28.3) määrab f_s keskmise väärtuse lõigul Δs. Et saada f_s väärtust antud punktis, tuleb minna üle piirile:

$$f_s = -\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta s} \tag{28.4}$$

Kuna U võib muutuda mitte ainult suunas s, vaid ka igas teises suunas toimunud nihkumisel, on valemiga (28.4) määratud piirväärtus nn. osatuletis U-st s järgi:

$$f_s = -\frac{\partial U}{\partial s}. \tag{28.5}$$

Seos (28.5) kehtib iga suvaliselt valitud suuna puhul, seega ka ristteljestiku telgede x, y ja z suunas:

$$\left.\begin{aligned} f_x &= -\frac{\partial U}{\partial x}, \\ f_y &= -\frac{\partial U}{\partial y}, \\ f_z &= -\frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{28.6}$$

Valemid (28.6) määravad jõuvektori projektsioonid koordinaattelgedel. Kui need projektsioonid on teada, saab määrata ka jõuvektori enese. Vastavalt seosele (2.8)

$$\mathbf{f} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right). \tag{28.7}$$

Vektorit

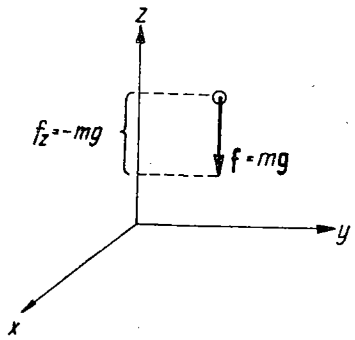
$$\frac{\partial a}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial a}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial a}{\partial z}\mathbf{k},$$

kus a on x, y, z skalaarne funktsioon, nimetatakse selle skalaari **g r a d i e n d i k s** ning tähistatakse grad a. Järelikult on jõud võrdne vastandmärgiga võetud potentsiaalse energia gradiendiga:

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad} U. \tag{28.8}$$

N ä i d e. Vaatleme näitena raskusjõudude välja. Suuname telje z vertikaalselt üles (joon. 67). Niisuguse telgede valiku korral on potentsiaalne energia (vt. (27.12))

$$U = mgz + \text{const}.$$



Joon. 67

Jõu projektsioonid telgedel on (28.6) järgi

$$f_x = 0, \quad f_y = 0, \quad f_z = -mg,$$

kust järeldub, et jõud on võrdne mg ning suunatud z-teljega vastupidiselt, s. o. vertikaalselt alla.

§ 29. MEHAANILISE SÜSTEEMI TASAKAALUTINGIMUSED

Isoleeritud süsteemi koguenergia jääb muutumatuks, seepärast saab kineetiline energia kasvada vaid potentsiaalse energia kahanemise arvel. Kui süsteem on niisuguses olekus, et kõikide kehade kiirus on null, potentsiaalse energia väärtus aga minimaalne, siis ilma välismõjuta ei saa süsteemis tekkida liikumist, süsteem on tasakaalus.

Seega saab isoleeritud süsteemi puhul olla tasakaaluline selline konfiguratsioon, mis vastab süsteemi potentsiaalse energia miinimumile.

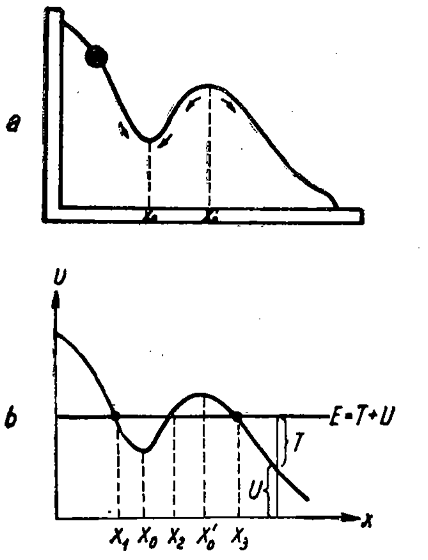
Vaatleme niisugust juhtu, kus kehade vastastikune asetus on määratud ainult ühe suurusega, näiteks koordinaadiga x. Näitena võiks tuua süsteemi Maa—kuulike, kus viimane saab hõõrdevabalt libiseda mööda liikumatut kõverat traati (joon. 68, a). Teiseks näiteks võib olla vedru otsa kinnitatud kuulikese hõõrdevaba liikumine mööda horisontaalset varrast (joon. 69, a). Funktsiooni $U(x)$ graafikud on kujutatud joonistel 68, b ja 69, b. U miinimumidele vastavad x väärtused x_0 (joonisel 69 on x_0 deformeerimata vedru pikkus). Funktsiooni U miinimumitingimus on

$$\frac{dU}{dx} = 0. \tag{29.1}$$

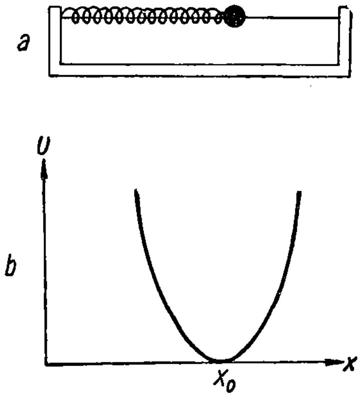
Vastavalt seosele (28.6) on tingimus (29.1) samaväärne tingimusega

$$f_x = 0 \tag{29.2}$$

$\left(\text{kui } U \text{ on ainult ühe muutuja } x \text{ funktsioon, siis } \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{dU}{dx}\right)$.



Joon. 68



Joon. 69

Seega on potentsiaalse energia miinimumile vastava konfiguratsiooni korral süsteemi kehadele mõjuvad jõud nullid. Tulemus jääb kehtima ka üldjuhul, kui U on mitme muutuja funktsioon.

Joonisel 68 kujutatud juhul on tingimused (29.1) ja (29.2) täidetud ka punktis $x=x_0'$ (s. o. funktsiooni U maksimumi korral). Ka sel juhul on kuulike tasakaalus. Kuid see tasakaal, erinevalt juhust $x=x_0$, on ebapüsiv: tarvitseb vaid kuulikesel nihkuda veidi sellest asendist kõrvale, kui tekivad jõud, mille mõjul kuulike hakkab eemalduma asendist x_0'. Jõud aga, mis tekivad kuulikese väljaviimisel püsiva tasakaalu asendist ($x=x_0$), on suunatud nii, et nad püüavad viia kuulikest tasakaaluasendisse tagasi.

Kui on teada süsteemi potentsiaalset energiat väljendava funktsiooni kuju, saab teha mitmeid järeldusi süsteemi liikumise iseloomu kohta. Selgitame seda joonisel 68, *b* kujutatud graafiku abil. Kui süsteemi koguenergia väärtus vastab horisontaaljoonele, siis saab süsteem liikuda kas piirkonnas x_1-st x_2-ni või x_3-st lõpmatuseni. Piirkondadesse $x<x_1$ ja $x_2<x<x_3$ süsteem tungida ei saa, sest tema potentsiaalne energia ei saa olla suurem koguenergiast (kui see juhtuks, peaks kineetiline energia muutuma negatiivseks). Seega on piirkond $x_2<x<x_3$ potentsiaalibarjäär, millest süsteem antud koguenergia varu korral läbi tungida ei saa.

Joonis 68, *b* selgitab, kuidas U graafiku abil määrata kineetilist energiat, mida süsteem omab x antud väärtuse juures.

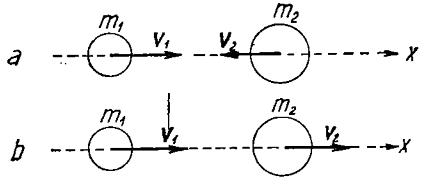
§ 30. KERADE TSENTRAALNE PÕRGE

Põrkumisel kehad deformeeruvad. Seejuures kineetiline energia, mis kehadel oli enne põrget, muundub kas osaliselt või täielikult elastse deformatsiooni potentsiaalseks energiaks ja kehade siseenergiaks. Kehade siseenergia suurenemist saadab nende temperatuuri tõus.

Põrke puhul esineb kaks piirjuhtu: absoluutselt elastne ja absoluutselt mitteelastne põrge. Absoluutselt elastseks nimetatakse põrget, mille korral ei esine kehade mehaanilise energia muundumist teisteks, mittemehaanilisteks energiavormideks. Niisugusel põrkel muundub kehade kineetiline energia kas osaliselt või täielikult elastse deformatsiooni potentsiaalseks energiaks. Pärast seda kehade kuju taastub ning nad tõukuvad. Selle tulemusena muundub elastse deformatsiooni potentsiaalne energia uuesti kehade kineetiliseks energiaks ning kehad lendavad laiali kiirustega, mille väärtus ja suund on määratud kahe tingimusega — süsteemi koguenergia ja koguimpulsi jäävusega.

Absoluutselt mitteelastset põrget iseloomustab see, et deformatsiooni potentsiaalset energiat ei teki; kehade kineetiline energia muundub kas osaliselt või täielikult siseenergiaks; pärast põrget kehad kas liiguvad ühesuguse kiirusega või jäävad paigale. Absoluutselt mitteelastse põrke puhul kehtib vaid impulsi jäävuse seadus, mehaanilise energia jäävuse seadus aga ei kehti — selle asemel peab paika summaarse energia, s. t. mehaanilise ja siseenergia summa jäävuse seadus.

Meie piirdume kahe kera tsentraalse põrke vaatlemisega. Põrget nimetatakse tsentraalseks, kui kerad enne põrget liiguvad mööda nende tsentreid läbivat sirget. Tsentraalne põrge saab toimuda, kui: 1) kerad liiguvad teineteisele vastu (joon. 70, *a*) ning 2) üks kera liigub teisele järele (joon. 70, *b*).



Joon. 70

Oletame, et kerad moodustavad isoleeritud süsteemi, s. o. keradele rakendatud välisjõud tasakaalustuvad.

Vaatleme algul absoluutselt mitteelastset põrget. Olgu kerade massid m_1 ja m_2 ning nende kiirused enne põrget $\mathbf{v}_{10}$ ja $\mathbf{v}_{20}$. Jäävuse seaduse alusel peab kerade summaarne impulss pärast põrget olema võrdne summaarse impulsiga enne põrget:

$$m_1\mathbf{v}_{10}+m_2\mathbf{v}_{20}=m_1\mathbf{v}+m_2\mathbf{v}=(m_1+m_2)\mathbf{v} \quad (30.1)$$

($\mathbf{v}$ on mõlema kera ühesugune kiirus pärast põrget).

Avaldisest (30.1) järeldub, et

$$\mathbf{v}=\frac{m_1\mathbf{v}_{10}+m_2\mathbf{v}_{20}}{m_1+m_2}. \qquad (30.2)$$

Et vektorid $\mathbf{v}_{10}$ ja $\mathbf{v}_{20}$ on suunatud mööda sama sirget, siis on ka vektor $\mathbf{v}$ suunatud mööda seda sirget. Juhul b (vt. joon. 70) ühtib tema suund vektorite $\mathbf{v}_{10}$ ja $\mathbf{v}_{20}$ suunaga. Juhul a ühtib vektori $\mathbf{v}$ suund selle vektori $\mathbf{v}_{i0}$ suunaga, mille puhul korrutis $m_i v_{i0}$ on suurem.

Vektori $\mathbf{v}$ mooduli saab arvutada järgmisest valemist:

$$v=\left|\frac{m_1 v_{10}\pm m_2 v_{20}}{m_1+m_2}\right|, \qquad (30.3)$$

kus v_{10} ja v_{20} on vektorite $\mathbf{v}_{10}$ ja $\mathbf{v}_{20}$ moodulid; märk — vastab juhule a, märk + juhule b.

Nüüd vaatleme absoluutselt elastset põrget. Niisugusel põrkel kehtib kaks jäävuse seadust: impulsi jäävuse seadus ja mehaanilise energia jäävuse seadus.

Tähistame kerade massid m_1 ja m_2, nende kiirused enne põrget $\mathbf{v}_{10}$ ja $\mathbf{v}_{20}$ ning kiirused pärast põrget $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$. Kirjutame impulsi ja energia jäävuse võrrandid:

$$m_1\mathbf{v}_{10}+m_2\mathbf{v}_{20}=m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2, \qquad (30.4)$$

$$\frac{m_1\mathbf{v}_{10}^2}{2}+\frac{m_2\mathbf{v}_{20}^2}{2}=\frac{m_1\mathbf{v}_1^2}{2}+\frac{m_2\mathbf{v}_2^2}{2}.[1] \qquad (30.5)$$

Teisendame (30.4) järgmiselt:

$$m_1(\mathbf{v}_{10}-\mathbf{v}_1)=m_2(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_{20}). \qquad (30.6)$$

Arvestades, et $(\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2)=(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})$, viime (30.5) kujule

$$m_1(\mathbf{v}_{10}-\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_{10}+\mathbf{v}_1)=m_2(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_{20})(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_{20}). \qquad (30.7)$$

Sümmeetriakaalutlustel võib väita, et kerade kiirused pärast põrget on suunatud mööda sama sirget, kus liikusid kerade tsentrid enne põrget. Järelikult avaldistes (30.6) ja (30.7) on kõik vektorid kollineaarsed. See võimaldab seoseid (30.6) ja (30.7) võrreldes teha otsuse, et

$$\mathbf{v}_{10}+\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_{20}. \qquad (30.8)$$

Korrutanud avaldise (30.8) m_2-ga ja lahutanud saadud tulemuse avaldisest (30.6) ning korrutanud seejärel seose (30.8) m_1-ga ja liitnud tulemuse avaldisega (30.6), saame kerade kiirused pärast põrget:

[1] Vt. seost (24.7).

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{v}_1&=\frac{2m_2\mathbf{v}_{20}+(m_1-m_2)\mathbf{v}_{10}}{m_1+m_2},\\ \mathbf{v}_2&=\frac{2m_1\mathbf{v}_{10}+(m_2-m_1)\mathbf{v}_{20}}{m_1+m_2}.\end{aligned}\right\} \qquad (30.9)$$

Arvuliste tulemuste saamiseks projitseerime võrranditega (30.9) määratud vektorid $\mathbf{v}_{10}$ suunale:

$$v_1=\frac{\mp 2m_2 v_{20}+(m_1-m_2)v_{10}}{m_1+m_2},$$

$$v_2=\frac{2m_1 v_{10}\mp(m_2-m_1)v_{20}}{m_1+m_2}.$$

Nendes valemites on v_{10} ja v_{20} vektorite $\mathbf{v}_{10}$ ja $\mathbf{v}_{20}$ moodulid ning v_1 ja v_2 vektorite $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ projektsioonid. Ülemine märk — vastab juhule, kus kerad liiguvad teineteisele vastu, alumine märk + juhule, kus esimene kera liigub teisele järele.

Kerade kiirused pärast absoluutselt elastset põrget ei saa olla ühesugused. Tõepoolest, võrrutanud $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ avaldised seoses (30.9), saame pärast vajalikke teisendusi

$$\mathbf{v}_{10}=\mathbf{v}_{20}.$$

Järelikult selleks, et kerade kiirused pärast põrget oleksid võrdsed, peavad kerad enne põrget liikuma ühesuguse kiirusega, niisugusel juhul aga ei saa põrge toimuda. Siit järeldub, et kerade kiiruste võrdsus pärast põrget on vastuolus energia jäävuse seadusega. Niisiis, mitteelastse põrke korral ei kehti mehaanilise energia jäävus: see energia muundub osaliselt siseenergiaks, mille tulemusena kehad soojenevad.

Vaatleme juhtu, kus põrkuvate kerade massid on võrdsed: $m_1=m_2$. Valemitest (30.9) järeldub, et niisugusel tingimusel

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_{20}, \quad \mathbf{v}_2=\mathbf{v}_{10},$$

s. o. kerad vahetavad põrkel kiirusi. Erijuhul, kui üks võrdse massiga keradest, näiteks teine, oli enne põrget paigal, hakkab ta pärast põrget liikuma kiirusega, mis oli esimesel keral enne põrget; esimene kera jääb pärast põrget paigale.

Valemite (30.9) abil on võimalik määrata kera kiirust pärast elastset põrget vastu liikumatut või liikuvat seina, mida võib pidada lõpmata suure massiga m_2 ning lõpmata suure raadiusega keraks. Jagades valemite (30.9) lugeja ja nimetaja m_2-ga ning jättes arvestamata tegurit m_1/m_2 sisaldavad liikmed, saame

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_{20} - \mathbf{v}_{10},$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{20}.$$

Nagu tulemusest järeldub, jääb seina kiirus muutumatuks. Kera kiiruse suund aga, kui sein on liikumatu ($\mathbf{v}_{20}=0$), muutub vastupidiseks; liikuva seina korral muutub ka kera kiiruse arvväärtus (ta kasvab $2v_{20}$ võrra, kui sein liigub kerale vastu, ning kahaneb $2v_{20}$ võrra, kui kera liigub seinale järele).

Neljas peatükk

MITTEINERTSIAALSED TAUSTSÜSTEEMID

§ 31. INERTSIJÕUD

Nagu juba märgitud (vt. § 13), kehtivad Newtoni seadused vaid inertsiaalsetes taustsüsteemides. Keha kiirendus $\mathbf{w}$ on ühesugune kõikide inertsiaalsüsteemide suhtes. Kuna iga mitteinertsiaalne süsteem liigub inertsiaalsete suhtes mingi kiirendusega, siis on keha kiirendus mitteinertsiaalses süsteemis $\mathbf{w}'$ erinev kiirendusest $\mathbf{w}$. Tähistame keha kiirenduste vahe inertsiaalses ja mitteinertsiaalses süsteemis $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{a}. \qquad (31.1)$$

Kui mitteinertsiaalne süsteem on kulgliikumises inertsiaalse suhtes, langeb $\mathbf{a}$ kokku mitteinertsiaalse süsteemi kiirendusega. Pöörlemise korral on mitteinertsiaalse süsteemi eri punktide kiirendused erinevad. Sel juhul ei saa kiirendust $\mathbf{a}$ vaadelda kui mitteinertsiaalse süsteemi kiirendust inertsiaalse suhtes.

Olgu $\mathbf{f}$ resultantjõud, millega mõjuvad antud kehale kõik teised kehad. Siis Newtoni teise seaduse järgi

$$\mathbf{w} = \frac{1}{m}\mathbf{f}.$$

Mitteinertsiaalse süsteemi suhtes aga avaldub keha kiirendus (31.1) alusel järgmisel kujul

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} - \mathbf{a} = \frac{1}{m}\mathbf{f} - \mathbf{a}.$$

Seega isegi siis, kui kehale rakendatud jõudude resultant on null, liigub keha mitteinertsiaalse süsteemi suhtes kiirendusega $-\mathbf{a}$, s. t. nii, nagu mõjuks talle jõud $-m\mathbf{a}$.

Järelikult, kirjeldades liikumist mitteinertsiaalsetes taustsüsteemides, võib kasutada dünaamika võrrandeid, kui kehade vahel mõjuvate jõudude kõrval võtta arvesse veel nn. *inertsijõud* $\mathbf{f}_{in}$. Viimane on võrdne keha massi ning inertsiaalse ja mitteinertsiaalse taustsüsteemi suhtes võetud kiirenduste vahe vastandmärgilise korrutisega:

$$\mathbf{f}_{in} = -m(\mathbf{w} - \mathbf{w}') = -m\mathbf{a}. \qquad (31.2)$$