

Kaheksas peatükk

HÜDRODÜNAAMIKA

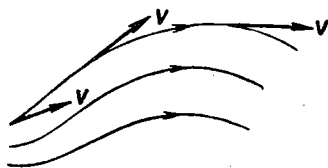
§ 54. VOOLUJOONED JA VOOLUTORUD. JOA PIDEVUS

Vedeliku liikumise kirjeldamiseks võiks määrata vedeliku iga osakese trajektoori ja kiiruse aja funktsioonina. Niisugust võtet kasutas Lagrange. Kuid selle asemel võib jälgida ruumipunkte ning märkida üles kiirused, millega vedelikuosakesed läbivad iga antud punkti. Seda võtet tuntakse Euleri meetodi nime all.

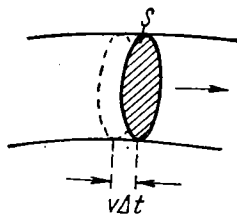
Vedeliku liikumise oleku saab määrata, kui iga ruumipunkti jaoks on teada kiirusvektor kui aja funktsioon. Kõikidele ruumipunktile vastavate vektorite \mathbf{v} hulk moodustab kiirusvektorite välja, mida saab kujutada graafiliselt järgmisel viisil. Tõmbame voolavas vedelikus jooned nii, et nende puutuja igas punktis ühtiks suuna poolest vektoriga \mathbf{v} (joon. 141). Neid jooni nimetatakse voolujoonteks.

Lepime kokku tõmmata voolujooned nii, et nende tihedus (vooluga risti asetatud pinnatükikest ΔS läbivate voolujoonte arvu ΔN suhe ΔS -ga) oleks võrdeline kiiruse arvvaartusega antud kohas. Niisugusel tingimusel saab voolujoonte pildi järgi otsustada peale kiirusvektori \mathbf{v} suuna ka selle suuruse üle ruumi eri punktides: seal, kus kiirus on suurem, asetsevad voolujooned tihedamalt ning vastupidi, kus kiirus on väiksem, on ka voolujoonte tihedus väiksem.

Et vektori \mathbf{v} suurus ja suund igas punktis võivad aja jooksul muutuda, siis võib pidevalt muutuda ka voolujoonte pilt. Kui kiirusvektor jääb igas ruumipunktis konstantseks, nimetatakse voolamist statsionaarseks. Statsionaarsel voolamisel läbib



Joon. 141

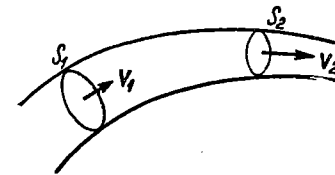


Joon. 142

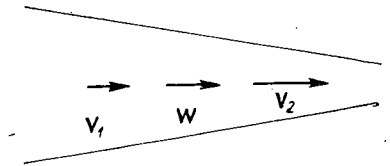
iga vedelikuosake ruumi antud punkti sama kiirusega \mathbf{v} . Voolujoonte pilt jääb statsionaarsel voolamisel muutumatuks ning voolujooned ühtivad osakeste trajektooridega.

Voolujoontega piiratud vedelikuosa nimetatakse voolutoruks. Kiirusvektor \mathbf{v} , olles igas punktis voolujoone puutujaks, on puutujaks ka voolutoru pinnale, järelikult ei saa vedelikuosakesed läbida voolutoru seina.

Võtame kiirusega risti asetseva voolutoru lõike S (joon. 142). Oletame, et vedelikuosakeste kiirus on selle lõike kõikides punktides ühesugune. Ajavahemiku Δt jooksul läbivad lõiget S kõik osakesed, mille algkaugus sellest lõikest ei ületanud väärtust



Joon. 143



Joon. 144

$v\Delta t$. Järelikult on ajavahemikus Δt lõiget S läbinud vedeliku ruumala $Sv\Delta t$, ajaühikus lõiget läbinud vedeliku ruumala on aga Sv . Oletame, et voolutoru on nii peenike, et selle igas lõikes võib kiirust konstantseks pidada. Kui vedelik ei ole kokkusurutav, s. o. tema tihedus on kõikjal ühesugune ning muutuda ei saa, siis jääb vedeliku hulk kahe lõike S_1 ja S_2 (joon. 143) vahel muutumatuks. Siit järeldub, et ajaühikus lõikeid S_1 ja S_2 läbinud vedelikuruumalad peavad olema võrdsed:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

(tuletame meelde, et läbi voolutoru seina vedelikuosakesed ei pääse).

Ülaltoodud arutluskäik on rakendatav suvalise lõigete paari S_1 ja S_2 puhul. Järelikult peab kokkusurumatu vedeliku korral suurus Sv olema ühesugune sama voolutoru mistahes lõikes:

$$Sv = \text{const.} \quad (54.1)$$

Saadud tulemust nimetatakse joa pidevuse teoreemiks.

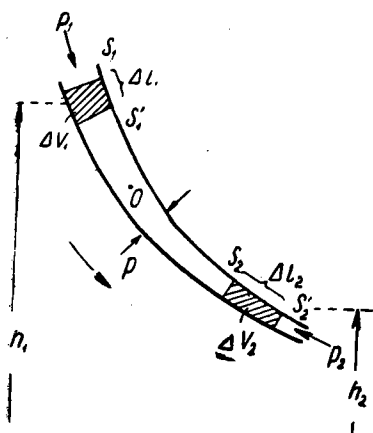
Valemist (54.1) järeldub, et muutuva ristlõikega voolutorus liiguvad mittekokkusurutava vedeliku osakesed kiirenevalt. Horisontaalses voolutorus (joon. 144) saab see kiirendus olla tingitud ainult rõhu muutumisest piki voolutoru: nendes kohtades, kus kiirus on väiksem, peab rõhk olema suurem ning vastupidi. Kvan-

titatiivse seose voolu kiiruse ja rõhu vahel selgitame välja järgmises paragrahvis.

Joa pidevuse teoreem on rakendatav ka reaalseste vedelike ning isegi gaaside puhul, kui nende kokkusurutavuse võib jätta arvestamata. Arvutused näitavad, et vedelike või gaaside voolamisel helikiirusest väiksemate kiirustega võib neid teatud täpsusega lugeda mittekokkusurutavateks.

§ 55. BERNOULLI VÖRRAND

Uurides vedelike liikumist, võib paljudel juhtudel eeldada, et vedelikuosade liikumisel üksteise suhtes ei teki hõõrdejõudusid. Vedelikku, milles täielikult puudub sisehõõrdumine (viskoossus), nimetatakse **i d e a a l s e k s**.



Joon. 145

Eraldame statsionaarselt voolavas ideaalses vedelikus väikese ristlõikega voolutoru (joon. 145). Võtame vaatluse alla vedelikuhulga, mida piiravad voolutoru seinad ning voolujoontega risti asetsevad lõiked S_1 ja S_2 . Ajavahemikus Δt liigub see vedelik mööda toru, kusjuures lõige S_1 läbib tee Δl_1 ja nihkub asendisse S'_1 , lõige S_2 aga läbib tee Δl_2 ja nihkub asendisse S'_2 . Joa pidevuse tõttu on joonisel viirutatud toru lõigud ruumvõrdsed: $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$.

Vedeliku iga osakese energia koosneb kineetilisest energiast ning potentsiaalsest energiast. Maa raskusväljas. Voolamise statsionaarsuse tõttu on kõigil vedelikuosakestel, mis ajavahemiku Δt lõpuks asuvad viirutamata ruumiosa mistahes punktis (vt. näiteks punktis O joonisel 145), sama kiirus ning järelikult ka sama kineetiline energia, nagu oli osakesel, mis läbis selle punkti alghetkel. Seega saab vaatluse all oleva vedelikuhulga energia juurdekasvu ΔE arvutada viirutatud vedelikuosade ΔV_1 ja ΔV_2 energiatega vahena.

Olgu voolutoru ristlõige ning lõigud Δl nii väikesed, et kumagi viirutatud ruumala igas punktis võib kiiruse v , rõhu p ning punkti kõrguse ühisest horisontaalpinnast h väärtused lugeda võrdseteks. Energia juurdekasv avaldub siis alljärgnevalt:

$$\Delta E = \left(\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left(\frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right) \quad (55.1)$$

(ρ on vedeliku tihedus).

Ideaalses vedelikus sisehõõrdejõud puuduvad, seepärast peab energia juurdekasv (55.1) olema võrdne tööga, mille sooritavad rõhumisjõud. Rõhumisjõud voolutoru seintele on risti toru seinaga selle igas punktis, seega nad antud juhul tööd ei tee. Nullist erinev on ainult lõigetes S_1 ja S_2 rakendatud jõudude töö. See töö

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2) \Delta V. \quad (55.2)$$

Võrrutanud avaldised (55.1) ja (55.2), jaganud saadud võrrandi liikmed ΔV -ga ning kandnud ühesuguste indeksitega suurus ühele võrrandipoolle, saame:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (55.3)$$

Lõiked S_1 ja S_2 olid võetud täiesti suvaliselt, seepärast võib väita, et voolutoru igas lõikes on avaldise $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p$ väärtus ühesugune. Vastavalt tuletamisel tehtud oletustele on võrrand (55.3) päris täpne ainult lõikepinna S lähenedes nullile, s.o. kui voolutoru tõmbub voolujooneks. Nii peab suurus p , v ja h , mis esinevad võrrandi (55.3) mõlemal poolel, omistama sama voolujoone kahele suvaliselt valitud punktile.

Tulemuse võime sõnastada järgmiselt: statsionaarselt voolavas ideaalses vedelikus kehtib piki suvaliselt valitud voolujoont tingimus

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const.} \quad (55.4)$$

Võrrandit (55.4) ning samuti sellega võrdväärset võrrandit (55.3) nimetatakse Bernoulli võrrandiks. Ehkki me tuletasime selle võrrandi ideaalse vedeliku jaoks, kehtib ta küllalt hästi ka reaalseste vedelike puhul, kui sisehõõrdumine nendes on väike.

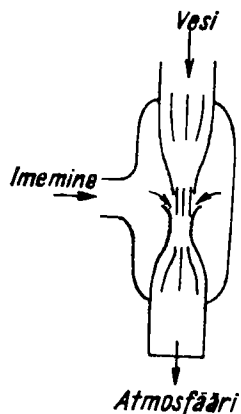
Vaatame mõningaid järeldusi, mis tulenevad Bernoulli võrrandist. Voolaku vedelik nii, et kiirus selle kõikides punktides on ühesugune. Niisugusel juhul annab võrrand (55.3) suvaliselt valitud voolujoone mistahes punktipaari puhul

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_2 - h_1),$$

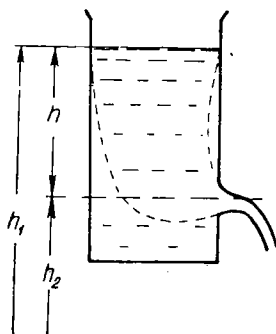
kust järeldub, et rõhu jaotus on siin samasugune nagu seisvas vedelikus (vt. (52.1)).

Horisontaalse voolutoru korral võtab tingimus (55.3) järgmise kuju:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2,$$



Joon. 146



Joon. 147

s. o. punktides, kus kiirus on suurem, on rõhk väiksem (kvalitatiivselt näidati seda juba eelmises paragrahvis).

Rõhu vähenemist suure voolukiirusega punktides on kasutatud veejoapumba ehitamisel (joon. 146). Veejuga antakse torusse, mis avaneb atmosfääri, seega on toru väljundil rõhk võrdne atmosfäärirõhuga. Torus on kitsend, kus vesi voolab suurema kiirusega, mistõttu rõhk selles kohas on atmosfäärirõhust väiksem. Sama rõhk jääb püsima ka toru ümbritsevas pumbakambris, mis on ühendatud toruga selle kitsas kohas oleva vahe kaudu. Ühendanud evakueeritava ruumi pumbakambriga, võib sellest pumbata välja õhu (või mõne muu gaasi) rõhuni suurusjärgus 100 mm Hg. Pumpa läbiv veejuga haarab väljapumbatava õhu ning viib selle atmosfääri.

Vaatame vedeliku väljavoolamist laia lahtise anumaseinas olevast väikesest avast. Eraldame vedelikus voolutoru, mille üheks lõikeks on vedeliku lahtine pind anumas ning teiseks ava, mille kaudu vedelik välja voolab¹ (joon. 147). Kummaski nendest lõigetest võib kiiruse ning kõrguse teatud algnivoost lugeda kõikide lõikepunktide jaoks ühesuguseks, seega võime kasutada võrrandit (55.3), mis on tuletatud just siisugustel eeldustel. Edasi, rõhk mõlemas lõikes on võrdne atmosfäärirõhuga. Peale selle võime vedeliku vaba pinna liikumise (langemise) kiiruse laias anumas lugeda nulliks. Kõike ülalmainitut arvestades saame võrrandi (55.3) kirjutada kujul

$$\rho gh_1 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh_2,$$

¹ Täpsemalt, anumast väljuva joa ristlõige. Kui ei võeta tarvitusele eribabinõusid, on joa ristlõige avast väiksem.

kus v on vedeliku avast väljavoolamise kiirus. Jaganud kõiki võrrandi liikmeid ρ -ga ning tähistanud vedeliku vaba pinna kõrguse ava suhtes $h = h_1 - h_2$, saame:

$$\frac{v^2}{2} = gh, \text{ kust } v = \sqrt{2gh}. \quad (55.5)$$

Seda valemit nimetatakse Torricelli valemiks.

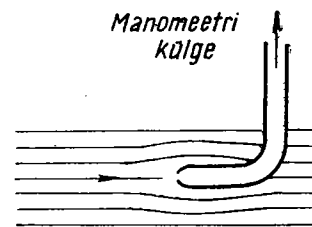
Seega on vedeliku väljavoolamise kiirus väikesest avast, mis asub vedeliku lahtisest pinnast arvates sügavusel h , niisama suur kui kiirus, mille saavutab kõrguselt h vabalt langev keha. Ei tohi unustada, et see tulemus on saadud ideaalse vedeliku jaoks. Reaalsete vedelike korral on väljavoolamise kiirus väiksem ning erinevus valemi (55.5) järgi saadud väärtusest seda suurem, mida viskoossem on vedelik.

§ 56. RÕHU MÕÕTMINE VOOLAVAS VEDELIKUS

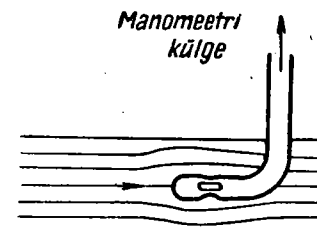
Eelmises paragrahvis nägime, et rõhk vedeliku sees on seotud voolamise kiirusega. Rõhu mõõtmiseks vedelikku viidud riist rikub vedeliku voolamise iseloomu, järelikult muudab ta ka mõõdetava rõhu suurust. Asetame vedelikku kõveraks painutatud manomeetertoru, ava vastuvoolu (joon. 148). Niisugust toru nimetatakse Pitot' toruks. Võtame vaatluse alla voolujoone, mis suundub ava keskpunkti. Kiirus muutub mööda seda voolujoont alates väärtusest v suurtel kaugustel torust, kus vool on häirimata, kuni nullini vahetult ava ees. Bernoulli võrrandi järgi on rõhk ava ees (järelikult ka manomeetertorus) $\rho v^2/2$ võrra suurem kui rõhk p häirimata voolu piirkonnas. Järelikult näitab Pitot' toruga ühendatud manomeeter rõhku

$$p' = p + \frac{\rho v^2}{2}. \quad (56.1)$$

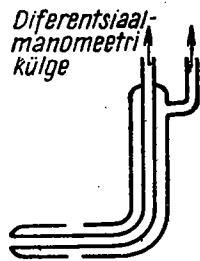
Rõhu dimensiooniga suurust $\rho v^2/2$ nimetatakse dünaamiliseks rõhuks. Rõhku p on hakatud nimetama staatiliseks rõhuks.



Joon. 148



Joon. 149



Joon. 150

seks rõhuks. Rõhk p' , s.o. staatilise ja dünaamilise rõhu summa, on kogurõhk. Seega saab Pitot' toru abil mõõta kogurõhku (56.1).

Kui peenesse painutatud torusse teha külgevad, siis nende avade läheduses kiirus (aga järelikult ka rõhk) erineb vähe kiirusest (ja rõhust) häirimata voolu piirkonnas (joon. 149). Seepärast näitab niisuguse toruga, nn. rõhusondiga, ühendatud manomeeter staatilist rõhku p .

Teades staatilist ja kogurõhku, saab leida dünaamilise rõhu $\rho v^2/2$ ning siit voolu kiiruse v (oletatakse, et vedeliku tihedus on teada). Kui monteerida kokku Pitot' toru ja rõhusond, nagu näidatud joonisel 150, ning ühendada sellise süsteemiga diferentsiaalmanomeeter (s.o. manomeeter, mis mõõdab rõhkude vahet), annab viimase näit vahetult dünaamilise rõhu. Gradueerinud niisuguse manomeetri kiiruse väärtuste järgi, saame otse manomeetrit lugeda voolu kiiruse.

§ 57. IMPULSI JÄÄVUSE SEADUSE RAKENDUSI VEDELIKU VOOLAMISEL

Vedelike ja gaaside, samuti kui teiste kehade puhul on rakendatav impulsi jäävuse seadus. Rakendame seda seadust mõningate ülesannete lahendamiseks.

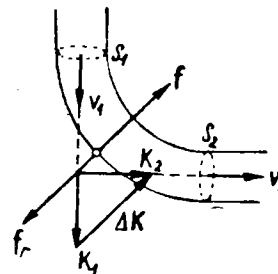
Voolava vedeliku reaktsioon painutatud toru seintele. Oletame, et mittekokkusurutav vedelik voolab painutatud torus statsionaarselt (joon. 151). Olgu toru lihtsuse mõttes ühtlase ristlõikega S . Niisugusel juhul on kiiruse v suurus joa pidevuse tõttu igas lõikes sama.

Vaatleme vedelikuhulka, mille piiravad lõiked S_1 ja S_2 . Ajavahemiku Δt jooksul voolab sellesse torulõike läbi ristlõike S_1 koguses $Sv\Delta t$ vedelikku, mille impulss $K_1 = \rho Sv v_1 \Delta t$. Samal ajal voolab sellest torulõigust läbi lõike S_2 välja sama hulk vedelikku, mille impulss $K_2 = \rho Sv v_2 \Delta t$. Seega annavad painutatud toru seinad vedelikule ajavahemikus Δt impulsi juurdekasvu $\Delta K = K_2 - K_1 = \rho Sv(v_2 - v_1)\Delta t$. Nagu teame, on keha impulsi juurdekasv ajaühiku jooksul võrdne kehale mõjuva jõuga. Järelikult mõjutavad toru seinad vedelikku jõududega, mille resultant $f = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \rho Sv(v_2 - v_1)$. Newtoni kolmanda seaduse järgi mõjutab vedelik toru seinu jõududega, mille resultant

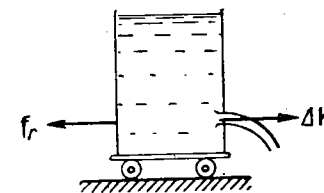
$$f_r = \rho Sv(v_1 - v_2). \quad (57.1)$$

Jõudu f_r nimetatakse vedeliku reaktsiooniks toru seintele.

Avast väljavoolava joa reaktsioon. Anuma seinas olevast



Joon. 151



Joon. 152

avast väljavoolav vedelikujuga (joon. 152) viib ajavahemikus Δt kaasa impulsi $\Delta K = \rho Sv v \Delta t$ (ρ on vedeliku tihedus, S — ava pindala, v — joa väljavoolamise kiirus). Selle impulsi annab väljavoolavale vedelikule anum. Newtoni kolmanda seaduse järgi saab anum ajavahemikus Δt impulsi $-\Delta K$, s.o. talle mõjub jõud

$$f_r = -\frac{\Delta K}{\Delta t} = -\rho Sv v. \quad (57.2)$$

Seda jõudu nimetatakse väljavoolava joa reaktsiooniks. Kui anum vankrikesele asetada, hakkab ta jõu f_r mõjul liikuma joaga vastupidises suunas.

Määrame jõu f_r suuruse, kasutades valemit (55.5), mis kirjeldab vedeliku väljavoolamist avast:

$$f_r = \rho S v^2 = 2gh\rho S. \quad (57.3)$$

Kui jõud f_r oleks väärtuse poolest võrdne hüdrostaatilise rõhumisega ava sulgevale korgile, nagu see võiks paista esimesel pilgul, siis peaks ta olema võrdne $gh\rho S$. Tegelikult on f_r kaks korda suurem. Niisuguse erinevuse põhjuseks on avast väljavoolamisel tekkiv rõhu ümberjaotumine vedelikus, kusjuures ava vastasseina lähedal osutub rõhk suuremaks kui seina juures, mille sees on ava.

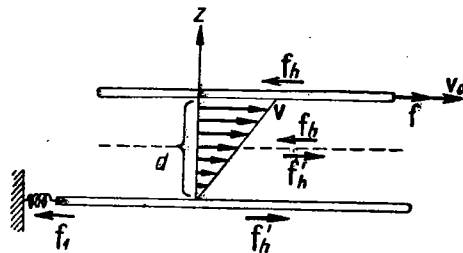
Väljavoolava gaasijoa reaktsioonile on rajatud reaktiivmotorite ja raketite töö. Reaktiivliikumisel pole vaja atmosfääri, järelikult saab seda põhimõtet kasutada kosmoselendudel.

Planeetidevaheliste lendude teooria rajas väljapaistev vene teadlane ja leidur K. Tsiolkovski (1857—1935). Ta lõi raketi lennu teooria ning põhjendas reaktiivaparaatide kasutamise võimalust planeetidevahelisteks lendudeks. Tsiolkovski töötas välja ka liitraketide liikumise teooria. Liitrakettides asub iga järgmine aste tegevusse pärast seda, kui eelmine aste, kulutanud ära kogu kütuse, eraldub raketist. Tsiolkovski ideed arendasid edasi ning teostasid nõukogude teadlased ja insenerid, kindlustades seega Nõukogude Liidule juhtiva osa kosmilise ruumi uurimises.

§ 58. SISEHÖÖRDEJOU

Ideaalne vedelik, s.o. sisehõõrdumiseta vedelik, on abstraktsioon. Kõikidele reaalsele vedelikele ja gaasidele on suuremal või väiksemal määral omane viskoossus ehk sisehõõrdumine. Viskoossus avaldub selles, et vedelikus või gaasis tekkinud liikumine lakkab aegamööda pärast seda, kui on kõrvaldatud liikumist esile kutsunud põhjused.

Et selgitada välja seaduspärasused, millele alluvad sisehõõrdejõud, vaatleme järgmist katset. Vedelikku on asetatud kaks paralleelset plaati (joon. 153), mille joonmõõtmised on palju suu-



Joon. 153

remad nendevahelisest kaugusest d . Alumist plaati hoitakse paigal, ülemist aga nihutatakse alumise suhtes teatud kiirusega v_0 . Katse näitab, et ülemise plaadi nihutamiseks püsiva kiirusega v_0 on vaja talle rakendada konstantset jõudu f . Kuna plaat liigub selle jõu mõjul ühtlaselt (ilma kiirenduseta), siis peab jõu f mõju tasakaalustama temaga võrdvastupidine jõud, mis ilmselt on vedelikus liikuvale plaadile mõjuv hõõrdejõud. Tähistame selle f_h .

Muutes plaadi liikumise kiirust v_0 , plaadi pindala S ja plaatidevahelist kaugust d , selgub, et

$$f_h = \eta \frac{v_0}{d} S, \quad (58.1)$$

kus η on võrdetegur, mille väärtus sõltub vedeliku iseloomust ja olekust (näiteks temperatuurist) ning mida nimetatakse sisehõõrde- ehk viskoossusteguriks ehk lihtsalt vedeliku (või gaasi) viskoossuseks.

Alumisele plaadile mõjub ülemise plaadi liikudes jõud f'_h , mis on suuruse poolest võrdne jõuga f_h . Et alumine plaat paigale jääks, peab jõu f'_h tasakaalustama jõuga f_i .

Nii tekib kahe vedelikku asetatud plaadi liikumisel teineteise

suhtes nende interaktsioon, mida iseloomustab valemiga (58.1) määratud jõud. Plaatide vastastikune mõju avaldub ilmselt nende vahel oleva vedeliku kaudu, kandudes ühelt vedelikukihilt teisele. Kui tõmmata mõttes plaatide vahele suvalises kohas nendega paralleelne tasapind (vt. punktiirjoont joonisel 153), siis võib väita, et sellest tasapinnast kõrgemal olev vedelik mõjutab all olevat vedelikku jõuga f'_h , tasapinnast allpool olev vedelik aga peal olevat vedelikku jõuga f_h , kusjuures f_h ja f'_h suuruse määrab valem (58.1). Seega määrab valem (58.1) peale plaatidele mõjuva hõõrdejõu väärtuse ka hõõrdejõu kahe kokkupuutuva vedelikukihi vahel.

Kui uurida vedelikuosakeste kiirusi eri kihtides, selgub, et need muutuvad plaatidega risti olevas suunas z (joon. 153) lineaarselt:

$$v(z) = \frac{v_0}{d} z. \quad (58.2)$$

Vedelikuosakesed, mis on otseses kokkupuutes plaatidega, nagu kleepuvad nende külge ning liiguvad niisama kiiresti kui plaadid ise. Vastavalt valemile (58.2)

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v_0}{d}. \quad (58.3)$$

Kasutades võrdust (58.3), saab valemile (58.1) anda järgmise kuju

$$f_h = \eta \frac{dv}{dz} S. \quad (58.4)$$

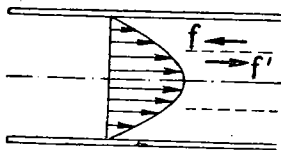
Suurus $\frac{dv}{dz}$ näitab, kui kiiresti muutub kiirus telje z suunas ning seda nimetatakse kiiruse gradiendiks (täpsemalt on see kiiruse gradiendi moodul; gradient ise on vektor).

Valemi (58.4) tuletasime selleks juhuks, kui kiirus muutub lineaarselt (sel juhul on kiiruse muutus telje z suunas ehk kiiruse gradient konstantne). Selgub aga, et valem jääb kehtima ka iga teise seaduse puhul, mis määrab kiiruse muutumise üleminekul kihilt kihile. Niisugusel juhul peab hõõrdejõu määramiseks kahe kokkupuutuva vedelikukihi vahel võtma gradiendi $\frac{dv}{dz}$ selles

kohas, kus asetseb kujutletav kihtidevaheline pind. Nii näiteks on vedeliku liikumisel mööda ümmargust toru kiirus toru seinte juures võrdne nulliga ning toru teljel maksimaalne. On võimalik tõestada, et väikeste voolukiiruste korral muutub kiirus toru raadiuse suunas seaduse järgi

$$v = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad (58.5)$$

kus R on toru raadius, v_0 — kiirus toru teljel, v — kiirus kau-



Joon. 154

gusel r toru teljest (joon. 154). Kujutame mõttes toru sees silindrilise pinna raadiusega r . Vedelikuosad, mis asuvad kahel pool seda pinda, mõjutavad üksteist jõududega, mille suurus pindalaühiku kohta

$$f = \eta \frac{dv}{dr} = \eta \frac{2v_0 r}{R^2},$$

s. o. kasvab võrdeliselt kihtidevahelise pinna kaugusega toru teljest (miinusmärgi, mille saaksime seose (58.2) diferentseerimisel, jätsume ära, sest valem (58.4) annab ainult sisehõrdejõu mooduli).

Kõik, mis käesolevas paragrahvis öeldud, on peale vedelike õige ka gaaside kohta.

Viskoossuse ühikuks SI-s on niisugune viskoossus, mille puhul kiiruse gradient 1 m/s ühe meetri kohta kutsub esile sisehõrdejõu 1 N kihtide kokkupuutepinna 1 m² kohta. Selle ühiku nime-tuseks on N·s/m².

CGS-süsteemis on viskoossuse ühikuks puaas (P). See on niisugune viskoossus, mille puhul kiiruse gradient 1 cm/s ühe sentimeetri kohta kutsub esile sisehõrdejõu 1 dyn kihtide kokkupuutepinna 1 cm² kohta. 10⁻⁸ puaasi on mikropuaas (μP).

Kaks nimetatud ühikut on järgmises arvulises vahekorras:

$$1 \text{ N} \cdot \text{s} / \text{m}^2 = 10 \text{ P}.$$

Sisehõrdetegur sõltub temperatuurist, kusjuures sõltuvuse iseloom on vedelike ja gaaside puhul oluliselt erinev. Vedelike viskoossus väheneb tugevasti temperatuuri tõustes. Gaasidel aga, vastupidi, viskoossus temperatuuri tõusul kasvab. Niisugune erinevus η sõltuvuses temperatuurist osutab sisehõrdemehhanismide erinevusele vedelikes ja gaasides.

§ 59. LAMINAARNE JA TURBULENTNE VOOLAMINE

Esineb kahte liiki vedeliku (või gaasi) voolamist. Ühtedel juhtudel vedelik nagu jaguneb kihtideks, mis libisevad üksteise suhtes segunemata. Niisugust voolamist nimetatakse laminaarseks¹ ehk kihiliseks. Kui laminaarsesse voolu viia värvitud juga, siis see säilib laiali valgumata kogu voolu ulatuses, sest vedelikuosakesed ei lähe üle ühest kihist teise. Laminaarne voolamine on statsionaarne.

Kui suurendada voolu kiirust või muuta voolu ristlõike mõõtmeid, muutub voolamise iseloom oluliselt. Tekib vedeliku energiline segunemine. Niisugust voolamist nimetatakse turbulentseks. Turbulentse voolamise korral muutub osakeste kiirus igas antud kohas korrapäratult kogu aeg — voolamine on mittestat-

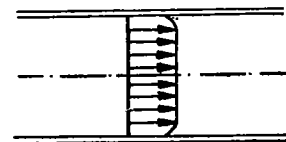
¹ Ladinakeelne sõna *lamina* tähendab plaadikest, riba.

sionaarne. Kui viia värvitud juga turbulentssesse voolu, siis juba väikestel kaugustel sisseeviimiskohast valgub värvitud vedelik laiali ning jaguneb ühtlaselt voolu ristlõike kogu ulatuses.

Joonisel 154 kujutatud kiiruse muutumine sõltuvalt toru telje kaugusest on iseloomulik laminaarsele voolamisele. Turbulentse voolamise korral on mõeldav rääkida vaid keskmisest (ajaliselt) kiiruse väärtusest toru lõike igas punktis. Keskmiste kiiruste «profiil» turbulentisel voolamisel on kujutatud joonisel 155. Toru seinte juures muutub kiirus palju tugevamini kui laminaarse voolamise korral, kuid ristlõike ülejäänud osas on kiiruse muutus väiksem.

Inglise teadlane Reynolds tegi kindlaks, et voolamise iseloom sõltub dimensioonita suurusest

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (59.1)$$



Joon. 155

kus ρ on vedeliku (või gaasi) tihedus, v — voolu keskmine kiirus (toru ristlõike ulatuses), η — vedeliku sisehõrdetegur, l — ristlõikele iseloomulik mõõde, näiteks ruudu külg, kui voolu ristlõige on ruudukujuline, raadius või diameeter, kui ristlõige on ümmargune jne.¹

Suurust (59.1) nimetatakse Reynoldsi arvuks. Selle väikeste väärtuste korral on voolamine laminaarne. Alates Re teatud väärtusest, mida nimetatakse kriitiliseks, võtab voolamine turbulentse iseloomu. Kui võtta ümmarguse ristlõike iseloomulikuks mõõtmeks selle raadius r , siis Reynoldsi arvu kriitiline väärtus on umbes 1000 (see arv avaldub sel puhul kujul $\rho v r / \eta$).² Reynoldsi arvus esineb vedeliku omadustest sõltuvate suuruste — tiheduse ρ ja sisehõrdeteguri η — suhe. Suhet

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (59.2)$$

nimetatakse kinemaatiliseks viskoossuseks. Suurust η nimetatakse dünaamiliseks viskoossuseks. Võtnud tarvitusele kinemaatilise viskoossuse mõiste, võime anda Reynoldsi arvule järgmise kuju:

$$Re = \frac{v l}{\nu}. \quad (59.3)$$

Reynoldsi arvu võib kasutada kui sarnasuse kriteeriumi vedeliku voolamisel torudes, kanalites jne. Erinevate vedelike (või gaaside) voolamise iseloom erinevate ristlõigetega torudes on täiesti ühesugune, kui igale voolule vastab sama Re väärtus.

¹ Lugejal soovitakse veenduda selles, et avaldis (59.1) on dimensioonita.

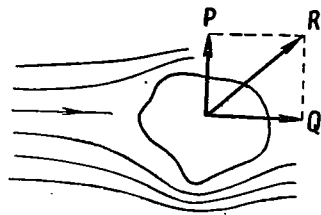
² On ilmne, et kui raadiuse asemel võtta lõike iseloomulikuks mõõtmeks diameeter, siis tuleb Re kriitiline väärtus suurendada kahekordseks.

§ 60. KEHADE LIIKUMINE VEDELIKES JA GAASIDES

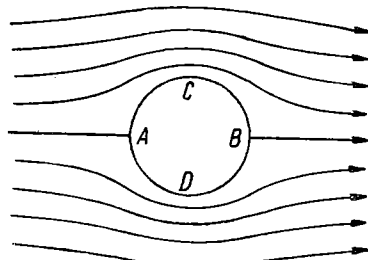
Keha liikumisel vedelikus või gaasis¹ mõjuvad talle jõud, mille resultandi tähistame tähega R (joon. 156). Jõu R võib lahutada kaheks komponendiks, millest üks, Q , on suunatud vastupidiselt keha liikumisega (ehk kehale pealevoolava vedeliku liikumise suunas), teine, P , aga risti selle suunaga. Komponente Q ja P nimetatakse vastavalt frontaaltakistuseks ja tõstejõuks. On selge, et liikumise suuna suhtes sümmeetrilisele kehale mõjub ainult frontaaltakistus, tõstejõud on sel juhul null.

Arvutused näitavad, et ideaalses vedelikus peaks keha ühtlane liikumine toimuma ilma frontaaltakistusega. Kuna ideaalses vedelikus puudub sisehõõrdumine, siis peaks see vedelik vabalt libisema mööda keha pinda. Joonisel 157 on kujutatud voolujooned juhul, kui ideaalne vedelik voolab ümber väga pika («lõputu») silindri. Täieliku ümbervoolamise tõttu on voolujoonte pilt täiesti sümmeetriline nii sirge AB kui ka sirge CD suhtes. Seepärast on rõhk punktides A ja B ühesugune (ning suurem kui häirimata voolus, sest kiirus nende punktide läheduses on väiksem); samuti on punktide C ja D läheduses rõhk ühesugune (ning väiksem kui häirimata voolus, sest kiirus nende punktide läheduses on suurem). Järelikult on silindri pinnale mõjuvate rõhumisjõudude resultant, mis sisehõõrdumise puudumisel võinuks tingida frontaaltakistuse, null. Sama tulemuse saab ka teistsuguse kujuga kehade korral.

Hoopis erinev on olukord kehade liikumisel viskoosses vedelikus. Sel juhul kleepub väga õhuke vedelikukiht keha pinnale ja liigub koos kehaga nagu üks tervik ning tõmbab hõõrdumise tõttu enesega kaasa kaugemaid vedelikukihte. Mida kaugemal on vede-

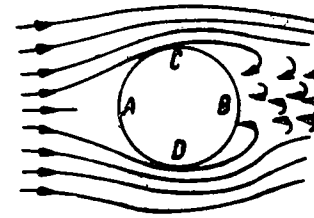


Joon. 156

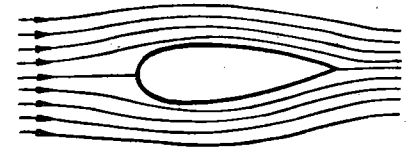


Joon. 157

¹ Paneme tähele, et keha liikumisel vedeliku suhtes jääva kiirusega on kehale mõjuv jõud vastavalt Galilei relatiivsuspriprintsibile samasugune kui siis, mil vedelik liigub sama kiirusega seisva keha suhtes. Joonis 156 vastab viimasele juhule.



Joon. 158



Joon. 159

likukiht keha pinnast, seda väiksem on tema kiirus ning teatud kaugusel kehast on vedelik keha liikumisest juba praktiliselt häirimata. Seega ümbritseb liikuvat keha vedelikukiht, milles esineb kiiruse gradient. Seda kihti nimetatakse piirkihiks ja selles mõjuvad hõõrdejõud, mis lõpptulemusena osutuvad rakendatuiks kehale ning tingivad frontaaltakistuse tekkimise. Kuid asi ei piirdu ainult sellega. Niisuguse piirkihi olemasolu muudab põhjalikult ümber keha voolamise iseloomu. Täielik ümbervoolamine osutub võimatuks. Hõõrdejõudude mõju pinnakihis kutsub esile voolu «lahtirebenemise» keha pinnast, mille tulemusena keha taga tekivad keerised (vt. joon. 158, kus on kujutatud viskoosse vedeliku voolamist ümber silindri). Vool viib keerised kaasa, aegamööda need sumbumad hõõrdumise tõttu ning nende energia kulub vedeliku soojendamiseks. Rõhk keha taga tekkinud keeriste piirkonnas on madalam, seepärast erineb rõhumisjõudude resultant nullist ja tekib frontaaltakistus.

Seega põhjustavad frontaaltakistust hõõrdejõududest ja rõhumisjõududest tingitud komponendid. Ristlõike kindlate mõõtmete puhul sõltub rõhumisest tingitud takistusjõud tugevasti keha kujust, sellepärast nimetatakse seda jõudu ka kujutakistuseks. Rõhumistakistus on minimaalne voolujoonelistel (tilgakujulistel) kehadel (joon. 159). Praktikas püütaksegi lennuki kerele ja tiibadele, auto kerele jms. anda niisugust kuju.

Hõõrdumistakistuse ja rõhumistakistuse suhte määrab Reynoldsi arvu (59.3) väärtus. Antud juhul on l keha mingi iseloomulik mõõt (näiteks raadius kerakujulise keha puhul), v — keha kiirus vedeliku suhtes.

Re väikeste väärtuste korral on põhiosa hõõrdumistakistusel, nii et rõhumistakistuse võib jätta arvesse võtmata. Re kasvades rõhumistakistus suureneb. Re suurte väärtuste korral määravad frontaaltakistuse peamiselt rõhumisjõud.

Asjaolu, et Reynoldsi arv määrab vedelikus liikuvale kehale mõjuvate jõudude iseloomu, võimaldab kasutada teda nähtuste sarnasuse kriteeriumina. Seda põhimõtet rakendatakse näiteks modelleerimisel. Nii käitub lennuki mudel gaasivoolus samuti kui lennuk ise, kui peale geomeetrilise sarnasuse on nende puhul võrdsed ka Reynoldsi arvud.

Stokesi seadus. Kui Re väärtused on väikesed, s. o. väikeste kiiruste v (ning ka väikeste l väärtuste; vt. (59.3)) korral tingib keskkonnatakistuse keha liikumisel peamiselt hõõrdumine. Stokesi poolt kindlaks tehtud seaduse järgi on takistusjõud sel juhul võrdeline dünaamilise viskoossusega η , keha liikumiskiirusega v vedeliku suhtes ning kehale iseloomuliku mõõtmega $l: f \sim \eta lv$ (oletatakse, et keha kaugus vedeliku piiridest, näiteks anuma seintest, on tunduvalt suurem keha mõõtmest). Võrdetegur sõltub keha kujust. Kera puhul, kui võtta iseloomulikuks mõõtmeks l kera raadius r , on võrdetegur 6π . Järelikult avaldub vedelikus väikese kiirusega liikuvale kerakesele mõjuv takistusjõud Stokesi seaduse järgi valemiga

$$f = 6\pi\eta rv. \quad (60.1)$$

Vedelikus või gaasis vertikaalselt langevale kerakesele mõjub kolm jõudu: 1) allapoole suunatud raskusjõud $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ (r on kerakese raadius, ρ — tema tihedus), 2) üleslükkejõud $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g$ (ρ_0 on vedeliku või gaasi tihedus) ja 3) liikumise suunaga vastupidine, seega ülespoole suunatud takistusjõud $6\pi\eta rv$. Esimesed kaks jõudu on konstantsed, kolmas aga võrdeline kiirusega v . Seega, kui kiirus on saavutanud teatud väärtuse v_0 , tekib olukord, kus üleslükke ja takistusjõud tasakaalustavad raskusjõu ning kuulike hakkab liikuma ühtlaselt. Ühtlase liikumise kiiruse v_0 saab määrata tingimusest

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g + 6\pi\eta r v_0.$$

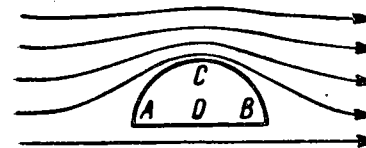
Lahendanud selle võrrandi v_0 suhtes, saame

$$v_0 = \frac{2(\rho - \rho_0)gr^2}{9\eta}. \quad (60.2)$$

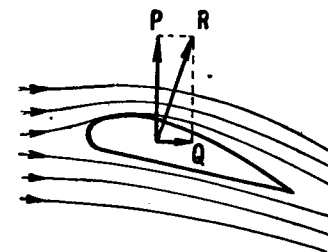
Nagu näha valemist (60.2), on kerakese ühtlase langemise kiirus võrdeline tema raadiuse ruuduga. Eespool näidatud põhjustel on valem (60.2) rakendatav vaid väikeste kerakeste puhul.

Mõõtnud katsest vedelikus langeva kerakese ühtlase liikumise kiiruse v_0 , saab valemist (60.2) määrata vedeliku viskoossuse η . Niisugust viskoossuse määramise meetodit kasutatakse vahel ka praktikas.

Tõstejõud. Tõstejõu tekkimisel vedeliku viskoossus olulist osa ei mängi. Joonisel 160 on kujutatud voolujoonte pilt poolsilindri liikumisel ideaalses vedelikus. Täieliku ümbervoolamise tõttu on voolujooned mõttelise sirge CD suhtes sümmeetrilised. Kuid sirge AB suhtes pilt sümmeetriline ei ole. Voolujooned on tihedamad punkti C läheduses, seepärast on rõhk siin väiksem kui punkti D



Joon. 160



Joon. 161

läheduses ning tekib tõstejõud. Analoogiliselt tekib tõstejõud ka viskoosses vedelikus.

Lennukit hoiab õhus tema tiibadele mõjuv tõstejõud. Frontaaltakistusel on lennuki liikumisel kahjulik osa, seepärast peab lennuki kerele ja tiibadele andma voolujoonelise kuju. Tiiva profiil peab kindlustama küllalt suure tõstejõu. Optimaalseks osutub joonisel 161 kujutatud suure vene teadlase N. Zukovski (1847—1921) poolt määratud tiiva profiil. Zukovski ja tema õpilase S. Tšaplõgini töödega on pandud alus tänapäeva aerodünaamikale. V. Lenin nimetas Zukovskit vene lennunduse isaks. Zukovski tuletas valemi tõstejõu määramiseks, mis sai lennukite kõikide aerodünaamiliste arvutuste aluseks.