

Kuues peatükk

GRAVITATSIOON

§ 46. GRAVITATSIOONISEADUS

Kõik kehad looduses tõmbuvad vastastikku. Newton avastas seaduse, millele see tõmbumine allub, ning see kannab ülemaailmse gravitatsiooni seaduse nime. Selle seaduse järgi on jõud, millega kaks keha tõmbuvad, võrdeline nende kehade massidega ning pöördvõrdeline nende vahelise kauguse ruuduga:

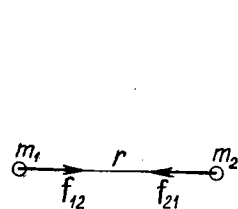
$$f = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (46.1)$$

kus γ on võrdetegur, mida nimetatakse gravitatsiooni-konstandiks. Jõud on suunatud mööda tõmbuvaid kehi läbivat sirget (joon. 128). Valem (46.1) annab suuruse poolest võrdsete jõudude f_{12} ja f_{21} arvvaartuse.

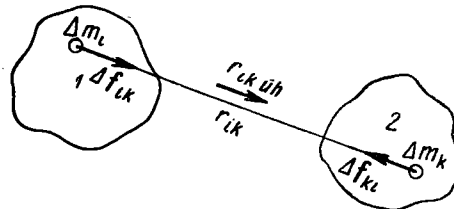
Valem (46.1) on ilmselt õige ainepunktide korral. Kehad, mida ei saa vaadelda ainepunktidenä, tuleb jagada elementideks massidega Δm , mille ruumalad on nii väikesed, et neid võiks käsitleda kui ainepunkte (joon. 129). Vastavalt valemile (46.1) tõmbuvad keha 1 i -s element ja keha 2 k -s element jõuga

$$\Delta f_{ik} = \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} r_{ik} \vec{u}_{ik}, \quad (46.2)$$

kus $r_{ik} \vec{u}_{ik}$ on elementilt Δm_i elementile Δm_k suunatud ühikvektor, r_{ik} aga nende elementide vahekaugus. Summeerinud seoses (46.2)



Joon. 128



Joon. 129

üle indeksi k kõikide väärtuste, saame resultantjõu, millega keha 2 mõjub keha 1 elementile massiga Δm_i :

$$\Delta f_{i2} = \sum_k \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} r_{ik} \vec{u}_{ik}. \quad (46.3)$$

Ning lõpuks, võtnud seoses (46.3) summa üle indeksi i kõikide väärtuste, s.o. summeerinud keha 1 kõikidele elementidele keha 2 poolt rakendatud jõud, saame

$$f_{12} = \sum_i \sum_k \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} r_{ik} \vec{u}_{ik}. \quad (46.4)$$

Summeerimine teostatakse üle indeksite i ja k kõikide väärtuste. Järelikult, kui keha 1 on jagatud N_1 elementiks ning keha 2 N_2 elementiks, siis sisaldab summa (46.4) $N_1 N_2$ liiget.

Newtoni kolmanda seaduse kohaselt mõjutab keha 1 keha 2 jõuga f_{21} , mis on võrdne $-f_{12}$.

Praktiliselt taandub summeerimine (46.4) integreerimisele ning on üldjuhul väga keeruline matemaatiline ülesanne. Kui tõmbuvad kehad on homogeenised kerad,¹ annab arvutamine valemi (46.4) järgi tulemuse:

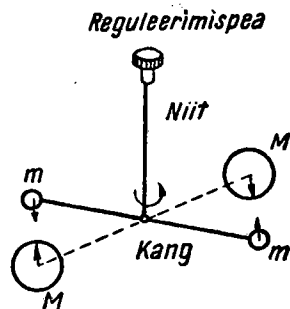
$$f_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} r_{12} \vec{u}_{12}, \quad (46.5)$$

kus m_1 ja m_2 on kerade massid, r — nende tsentrite vaheline kaugus $r_{12} \vec{u}_{12}$ — esimese kera tsentrist teise tsentrisse suunatud ühikvektor. Seega mõjutavad kaks kera teineteist nii, nagu oleksid nad ainepunktid, mis asuvad kerade tsentrites ning mille massid on võrdsed kerade massidega.

Kui üks kehast on kera väga suure raadiusega R (näiteks maakera), teine aga suvalise kujuga, kuid R -st palju väiksemate mõõtmetega ning asub suure kera pinna lähedal, siis nende interaktsiooni kirjeldab valem (46.5), milles r asemel tuleb võtta kera raadius (väikese kera mõõtmed ja tema kauguse kera pinnast võib jätta R -ga võrreldes arvestamata).

Võrdeteguriga γ võrrandis (46.1) ei ole otstarbekohane toimida nii, nagu tegime seda võrdeteguriga Newtoni teise seaduse võrrandis (s.o. muuta ta sobiva jõuühiku valimise teel võrdseks ühega), sest niisugusel juhul tuleks erinevate füüsikanähtuste uurimisel kasutada sama füüsikalise suuruse — jõu — erinevaid mõõtühikuid. Kui aga kasutada võrrandis (46.1) esinevate suuruste mõõtmiseks varem sissetoodud ühikuid, siis gravitatsiooni-konstant γ on dimensiooniga suurus, mille arvvaartuse peab määrama eksperimentist. γ dimensioon valemist (46.1) on

¹ Piisab, kui massi jaotus kerades on tsentraalsümmeetriline, s.o. tihedus sõltub ainult kaugusest kera tsentrini.



Joon. 130

$$[\gamma] = \frac{[f][r^2]}{[m^2]} = \frac{MLT^{-2}L^2}{M^2} = L^3M^{-1}T^{-2}.$$

γ arvvaartus määrati katsetest, milles mõõdeti tuntud massiga kehade vahel mõjuvat tõmbejõudu. Niisuguste katsete sooritamisel esinevad teatud raskused, sest kehade puhul, mille massi saab otseselt mõõta, on tõmbejõud äärmiselt väikesed. Nii näiteks kaks keha, kumbki massiga 100 g, tõmbuvad 1 m kaugusel teineteisest jõuga, mille suurusjärg on 10^{-6} N, s. o. 10^{-4} G.

Esimesena õnnestus γ katseliselt määrata Cavendish'il 1798. a. Ta kasutas jõudude mõõtmiseks väga tundlikku torisoonkaalude meetodit (joon. 130). Kaks pliiikera m (kumbki massiga 729 g) kinnitati kerge kangikese otstele ja asetati sümmeetriliselt paiknevate kerade M (kumbki massiga 158 kg) lähedale. Kangike rippus elastse niidi otsas, mille väände järgi sai määrata kerade vahel mõjuvat tõmbejõudu. Niidi ülemine ots oli kinnitatud reguleerimispea külge, mille pööramisega sai muuta kerade m ja M vahelist kaugust.

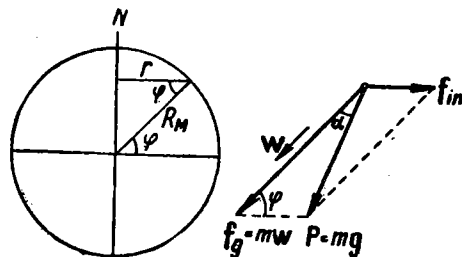
Mitmel viisil määratud γ väärtustest loetakse täpseimaks

$$\gamma = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2).$$

Kui valemis (46.5) võtta suurused m_1 , m_2 ja r ühikulise väärtusega, siis jõud on arvuliselt võrdne γ -ga. Nii tõmbuvad kaks kera kumbki massiga 1 kg ja tsentritevahelise kaugusega 1 m jõuga $6,670 \cdot 10^{-11}$ N.

§ 47. RASKUSKIIRENDUSE SÕLTUVUS KOHA GEOGRAAFILISEST LAIUSEST

Uurides kehade liikumist maapinna suhtes tuleb silmas pidada, et Maaga seotud taustsüsteem ei ole inertsiaalne. Orbiidil liikumisele vastav kiirendus on väiksem kui Maa ööpäevase pöörlemisega seotud kiirendus. Seepärast võib teatud täpsusega arves-



Joon. 131

tada, et Maaga seotud taustsüsteem pöörleb inertsiaalsüsteemide suhtes püsiva nurkkiirusega ω . Järelikult peab, vaadeldes kehade liikumist Maa suhtes, võtma arvesse ka inertsijõu — tsentrifugaaljõu

$$f_{in} = m\omega^2 r,$$

kus m on keha mass, r — selle keha kaugus Maa pöörlemisteljest (joon. 131).

Piirdudes juhtudega, kus keha kõrgus maapinnast on väike, võime võtta $r = R_M \cos \varphi$ (R_M — Maa raadius, φ — koha geograafiline laius). Tsentrifugaaljõu avaldis võtab siis kuju

$$f_{in} = m\omega^2 R_M \cos \varphi. \quad (47.1)$$

Kehade vaba langemise kiirendus Maa suhtes g on siis tingitud kahe jõu mõjust: kehale Maa poolt avaldatav külgetõmbejõud f_g ja tsentrifugaaljõud f_{in} . Nende jõudude resultant

$$P = f_g + f_{in}$$

on raskusjõud (vt. § 18). Et jõud P annab kehale massiga m kiirenduse g , siis kehtib seos

$$P = mg. \quad (47.2)$$

Erinevus P ja f_g vahel on väike, sest tsentrifugaaljõud on palju väiksem kui f_g . Nii näiteks $m = 1$ kg puhul on avaldis $m\omega^2 R_M$ ligikaudu võrdne 0,035 N ($\omega = 2\pi/86400$ s, R_M on umbes 6400 km), f_g aga on ligikaudu 9,8 N, s. o. peaaegu 300 korda suurem kui tsentrifugaaljõu maksimumväärtus (Maa ekvaatoril).

Nurga α jõudude f_g ja P suundade vahel saame määrata siinusteoreemi abil:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{f_{in}}{P} = \frac{m\omega^2 R_M \cos \varphi}{mg} \approx \frac{0,035}{9,8} \cos \varphi \approx 0,0035 \cos \varphi,$$

kust $\sin \alpha \approx 0,0035 \sin \varphi \cos \varphi \approx 0,0018 \sin 2\varphi$.

Väikese nurga siinuse võime asendada ligikaudu nurga enese väärtusega:

$$\alpha \approx 0,0018 \sin 2\varphi. \quad (47.3)$$

Seega muutub nurk α olenevalt geograafilisest laiusel φ nullist (ekvaatoril, kus $\varphi = 0$, ning poolustel, kus $\varphi = 90^\circ$) kuni väärtuseni 0,0018 rad ehk 6' (laiusel 45°).

Jõu P suund ühtib niidi suunaga, mille otsas ripub raske koormus. Seda suunda nimetatakse püstloee suunaks. Jõud f_g on suunatud Maa tsentrisse. Järelikult on püstlood suunatud Maa tsentri poole ainult poolustel ja ekvaatoril, olles vahepealsetel laiustel kallutatud sellest suunast avaldisega (47.3) määratud nurga võrra kõrvale.

Vahe $f_g - P$ on võrdne nulliga poolustel ning saavutab maksimumi (0,3% jõust f_g) ekvaatoril. Maakera lapikuse tõttu (Maa on telje sihis kokku surutud) muutub jõud f_g veidi, olenevalt laiusest, olles ekvaatoril umbes 0,2% väiksem kui poolustel. Kõige selle tulemusena muutub vaba langemise kiirendus g olenevalt laiusest piirides 9,780 m/s² ekvaatoril kuni 9,832 m/s² poolustel. $g = 9,80665$ m/s² on võetud raskuskiirenduse normaal- ehk standardväärtuseks.

Märgime, et inertsiaalse, näiteks heliotsentrilise taustsüsteemi suhtes liigub vabalt langev keha mitte kiirendusega g , vaid kiirendusega w , mille suund ühtib f_g suunaga ning mille väärtus on f_g/m . On lihtne veenduda (vt. joon. 131), et kuna g on kõikide kehade puhul ühesugune, siis on ka w kõikide kehade korral sama. Tõepoolest, erinevatele kehadele vastavatele vektoritele f_g ja P ehitatud kolmnurgad on sarnased (nurgad α ja φ on antud punktis asuvate mistahes kehade puhul ühesugused). Järelikult, suhe f_g/P ning sellega võrdne suhe w/g on kõikide kehade puhul sama, millest järeldubki, et võrdsete g -de korral on võrdsed ka w -d.

§ 48. INERTNE JA RASKE MASS

Mass sisaldub kahes seaduses, need on Newtoni teine seadus ja gravitatsiooniseadus. Esimesel juhul iseloomustab mass keha inertsit, teisel — gravitatsioonilisi omadusi, s. o. kehade omadust vastastikku tõmbuda. Seoses sellega kerkib küsimus, kas ei peaks mitte eristama inertset massi m_{in} raskest massist m_g .

Sellele küsimusele saab vastata ainult eksperiment. Vaatleme kehade vaba langemist heliotsentrilises taustsüsteemis. Igale maapinna läheduses asuvale kehale mõjub Maa külgetõmbejõud, mis valemi (46.5) järgi on

$$f = \gamma \frac{m_g M_M}{R_M^2}$$

(m_g on keha raske mass, M_M — Maa raske mass, R_M — maakera raadius).

Selle jõu mõjul saab keha kiirenduse w (mitte g ; vt. eelnevat paragrahvi), mis peab olema võrdne jõu f ja keha inertse massi m_{in} suhtega

$$w = \frac{f}{m_{in}} = \gamma \frac{M_M m_g}{R_M^2 m_{in}}. \quad (48.1)$$

Katsed näitavad, et kiirendus w on kõikide kehade puhul sama (sellest, et g on ühesugune, järeldus, et ka w on ühesugune). Tegur $\gamma \frac{M_M}{R_M^2}$ on samuti kõikide kehade puhul ühesugune. Järe-

likult ka suhe m_g/m_{in} osutub samaks kõikide kehade korral. Sama tulemuseni toovad kõik teised katsed, milles võiks ilmnedä inertse ja raske massi erinevus.

Katsete tulemused lubavad väita, et kõikide kehade inertne ja raske mass on omavahel võrdelised. Tähendab, et vastava mõõtühikute valiku korral saavad inertne ja raske mass võrdseteks, seepärast räägitaksegi füüsikas lihtsalt massist. Inertse ja raske massi samasusele rajas Einstein üldrelatiivsusteooria.

Märgime, et algusest peale, juba valemi (46.1) puhul, oletasime kehade massi identseks inertse massiga, mistõttu γ väärtuse määrasime eeldusel, et $m_g = m_{in}$. Seepärast võib seose (48.1) kirjutada kujul

$$w = \gamma \frac{M_M}{R_M^2}. \quad (48.2)$$

Viimasest seosest saab määrata Maa massi M_M . Suuruste ω , R_M ja γ katseliselt leitud väärtuste põhjal on saadud Maa massi väärtuseks $5,98 \cdot 10^{24}$ kg.

Edasi, teades Maa orbiidi raadiust R_{or} ja Maa tiirlemisperioodi T , saab määrata Päikese massi M_P . Maa kiirenduse $\omega^2 R_{or}$ ($\omega = 2\pi/T$) tingib Maa ja Päikese vaheline tõmbejõud. Järelikult,

$$M_M \omega^2 R_{or} = \gamma \frac{M_M M_P}{R_{or}^2},$$

kust saabki arvutada Päikese massi.

Analoogiliselt on määratud ka teiste taevakehade massid.

§ 49. KEPLERI SEADUSED

Gravitatsiooniseaduse sõnastamisel olid Newtonil aluseks Kepleri kolm seadust planeetide liikumise kohta.

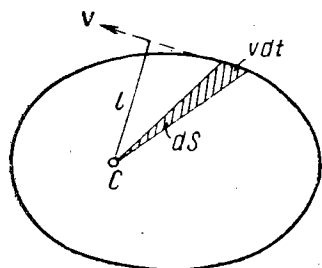
1. Kõik planeedid liiguvad mööda ellipseid, mille ühes fookuses asub Päike.

2. Planeedi raadiusvektor katab võrdsetes ajavahemikes võrdsed pindalad.

3. Planeetide tiirlemisperioodide ruudud suhtuvad nagu nende orbiitide suurte pooltelgede kuubid.

Kepleri esimene seadus näitab, et planeedid liiguvad tsentraaljõudude väljas. Tõepoolest, nagu nägime § 37, on keha trajektor tsentraaljõudude väljas tasakõver — hüperbool, parabool või ellips —, mille fookus ühtib jõudude tsentriga.

Oletades lihtsuse mõttes, et orbiidid pole mitte ellipsid, vaid ringjooned (see on lubatav, sest praktiliselt erinevad kõikide planeetide orbiidid väga vähe ringjoontest), võime planeedi kiirenduse avaldada kujul



Joon. 132

$$\omega = \frac{v^2}{r},$$

kus v on planeedi kiirus, r — orbiidi raadius.

Teinud asenduse $v = 2\pi r/T$ (T on planeedi tiirlemisperiood). saame

$$\omega = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Viimase avaldise põhjal võime planeetidele Päikese poolt mõjuvate jõudude suhte kirjutada järgmisel kujul:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{m_1 \omega_1}{m_2 \omega_2} = \frac{m_1 r_1 T_2^2}{m_2 r_2 T_1^2}.$$

Asendanud vastavalt Kepleri kolmandale seadusele perioodide ruutude suhte orbiitide raadiuste kuupide suhtega, saame

$$f_1 : f_2 = \frac{m_1}{r_1^2} : \frac{m_2}{r_2^2}.$$

Niisiis järeldub Kepleri kolmandast seadusest, et jõud, millega Päike tõmbab planeeti enda poole, on võrdeline planeedi massiga ning pöördvõrdeline tema kauguse ruuduga Päikesest:

$$f = k \frac{m}{r^2}.$$

Oletanud, et võrdetegur k on omakorda võrdeline Päikese massiga, sai Newton meile juba tuttava valemi

$$f = \gamma \frac{mM_P}{r^2},$$

mis väljendab gravitatsiooniseadust.

Kepleri teine seadus on järeldus impulsimomendi jäävuse seadusest. Joonisest 132 nähtub, et raadiusvektori poolt ajavahemikus dt kaetud pindala dS on võrdne kolmnurga aluse vdt ja kolmnurga kõrguse l poole korrutisega (kõrgus l ühtib planeedi impulsi mv olaga Päikese suhtes):

$$dS = \frac{1}{2} l v dt = \frac{L}{2m} dt$$

(L on planeedi impulsimoment, mis võrdub $mv l$).

Avaldist $\frac{dS}{dt}$ nimetatakse sektorkiiruseks.

Seega

$$\text{sektorkiirus } \frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}.$$

Impulsimoment on tsentraaljõudude väljas jääv suurus, järelikult peab ka planeedi sektorkiirus olema konstantne. See tähendab, et võrdsetes ajavahemikes katab raadiusvektor võrdsed pindalad.

§ 50. KOSMILISED KIIRUSED

Et keha tiirleks ümber maakera ringorbiiti mööda, mille raadius erineb vähe Maa raadiusest R_M , peab ta liikuma teatud kiirusega v_1 . Selle kiiruse määramiseks võrrutame keha massi ja tsentripetaalkiirenduse korrutise keha le mõjuva raskusjõuga:

$$m \frac{v_1^2}{R_M} = mg.$$

Siit saame

$$v_1 = \sqrt{g R_M}. \quad (50.1)$$

Järelikult selleks, et mingi keha saaks Maa kaaslaseks, peab talle andma kiiruse v_1 , mida nimetatakse esimeseks kosmiliseks kiiruseks. Asendanud g ja R_M nende väärtustega, saame esimese kosmilise kiiruse jaoks

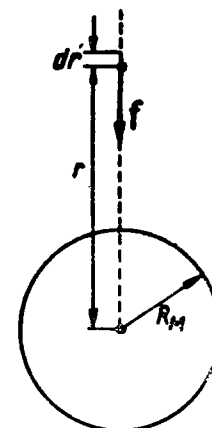
$$v_1 = \sqrt{g R_M} = \sqrt{9,8 \text{ ms}^{-2} \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1} = 8 \text{ kms}^{-1}.$$

Liikudes kiirusega v_1 ei lange keha Maa peale. Kuid sellest kiirusest ei piisa keha väljaviimiseks Maa külgetõmbe mõjusfäärist, s. o. eemaldamiseks Maast nii kaugale, et Maa külgetõmme ei mängiks enam olulist osa. Selleks vajalikku kiirust v_2 nimetatakse teiseks kosmiliseks kiiruseks.

Teise kosmilise kiiruse leidmiseks tuleb arvutada töö, mille peab sooritama Maa külgetõmbejõudude vastu keha, mis eemaldub maapinnalt lõpmata kaugale. § 26 tõestasime, et tsentraaljõudude väljas töö ei sõltu teest. Arvutame töö, mis tehakse keha liikumisel mööda Maa tsentrit läbivat sirget (joon. 133). Elementaartöö teelõigul dr on

$$dA = f dr = \gamma \frac{mM_M}{r^2} dr.$$

Kogutöö teel alates $r = R_M$ kuni $r = \infty$ leiame integreerimise teel:



Joon. 133

$$A = \int_{R_M}^{\infty} dA = \int_{R_M}^{\infty} \gamma \frac{mM_M}{r^2} dr = -\gamma \frac{mM_M}{r} \Big|_{R_M}^{\infty} = \gamma \frac{mM_M}{R_M}. \quad (50.2)$$

Võttes raskusjõu võrdseks Maa külgetõmbejõuga, saame kirjutada

$$mg = \gamma \frac{mM_M}{R_M^2}$$

ning siit

$$\gamma \frac{mM_M}{R_M} = mgR_M.$$

Nii saame töö (50.2) avaldada kujul

$$A = mgR_M. \quad (50.3)$$

Et ületada Maa külgetõmbejõudu ja väljuda selle mõju piirkonnast, peab keha energiast piisama valemiga (50.3) määratud töö sooritamiseks. Vajalik minimaalne kiirus v_2 kannab teise kosmilise kiiruse nimetust. Selle kiiruse määrab tingimus

$$\frac{mv_2^2}{2} = mgR_M,$$

kust

$$v_2 = \sqrt{2gR_M}. \quad (50.4)$$

Võrreldes valemid (50.4) ja (50.1), näeme, et teine kosmiline kiirus on $\sqrt{2}$ korda suurem kui esimene. Korrutades 8 km/s $\sqrt{2}$ -ga, saame v_2 jaoks väärtuse 11 km/s.

Kosmilised kiirused saavutati kõige esmalt Nõukogude Liidus. 4. oktoobril 1957 saadeti Nõukogude Liidus välja esimene Maa tehiskaaslane inimkonna ajaloos. 2. jaanuaril 1959 ületati ka teine piir: sellel päeval alustas Nõukogudemaalt oma teekonda kosmoserakett, mis väljus Maa külgetõmbe mõjupiirkonnast ning sai esimeseks tehisplaneediks Päikesesüsteemis. 12. aprillil 1961 lendas kosmosesse esimene inimene: nõukogude kosmonaut Juri Gagarin tegi tiiru ümber Maa ning maandus õnnelikult.

Seitsmes peatükk

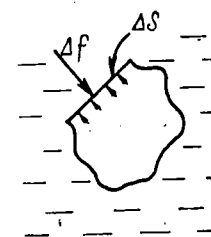
GAASIDE JA VEDELIKE STAATIKA

Mehaanika osad, milles tegeldakse vedelike ja gaaside uurimisega, kannavad nimetust hüdro- ja aeromehaanika. Need omakorda jagunevad hüdro- ja aerostaatikaks, kus uuritakse vedelike ja gaaside tasakaalu, ning hüdro- ja aerodünaamikaks, mis uurivad vedelike ja gaaside liikumist. Käesolevas peatükis vaadeldakse staatikat.

§ 51. RÕHK

Vedelatele ja gaasilistele kehadele on iseloomulik see, et nad ei avalda vastupanu nihkele, seepärast muutub nende kuju kui tahes väikeste jõudude mõjul. Vedeliku või gaasi ruumala muutmiseks aga peab neile rakendama lõplikke välisjõudusid. Ruumala muutudes tekivad vedelikus või gaasis elastsusjõud, mis lõpptulemusena tasakaalustavad välisjõudude mõju. Vedelike ja gaaside elastsusomadused avalduvad selles, et nende osade vahel, aga samuti nendega kokkupuutes olevatele kehadele mõjuvad jõud, mille suurus sõltub vedeliku või gaasi kokkusurumise astmest. Selle mõju iseloomustamiseks kasutatavat suurust nimetatakse rõhuks.

Vaatleme tasakaalus olevat vedelikku. Tasakaal tähendab seda, et vedeliku osad ei liigu üksteise suhtes ega ka vedelikuga kokkupuutes olevate kehade suhtes. Kujutleme vedelikus pinnatükikest ΔS (joon. 134), mille ulatuses kokkupuutuvad vedelikuosad mõjutavad teineteist võrdvastupidiste jõududega. Nende jõudude iseloomu väljaselgitamiseks eemaldame mõttes vedeliku ühelt poolt seda pinnatükikest ning asendame eemaldatud vedeliku mõju niisuguste jõududega, et ülejäänud vedelikuosade tasakaal säiliks. Need jõud peavad olema ΔS normaali suunalised, sest vastasel juhul tekitaks nende tangentsiaalkomponent vedeliku liikumise ning tasakaal oleks rikutud. Järelikult peab pinnatükikele ΔS mõjuvate jõudude resultant Δf mõjuma selle normaali suunas. Pindalaühiku kohta tuleva jõu Δf väärtus määrab rõhu



Joon. 134