Graafiteooria môisteid

<u>Definitsioon G01.</u> Olgu V mittetühi hulk, $V^{(2)}$ tema kôikide kaheelemendiliste alamhulkade hulk. *Graafiks* nimetatakse paari (V,E), kus E on suvaline $V^{(2)}$ alamhulk ($E \subseteq V^{(2)}$).
Hulga V elemente, $|V|=N$, nimetatakse graafi *tippudeks* ja hulga E elemente graafi *kaarteks*. Kui E on sümmeetriline, siis öeldakse, et graaf on *mittesuunatud* (orienteerimata).

<u>Definitsioon G02.</u> Gaafi nimetatakse *lôplikuks*, kui tema tippude hulk on lôplik.

<u>Definitsioon G03.</u> *Täisgraafiks* nimetatakse graafi, mille suvalised kaks tippu on kaarega ühendatud.

<u>Definitsioon G04.</u> N tipulise graafi G *seosmaat-riksiks* X(N*N) nimetatakse maatriksit, mille element $X_{ij}=1$, kui graafi tipud i ja j on kaarega ühendatud ning $X_{ij}=0$ vastupidisel juhul.

<u>Definitsioon G1.</u> *Klikiks* nimetatakse suvalist graafis G sisalduvat täisgraafi.

<u>Definitsioon G2.</u> Klikki, mis ei sisaldu üheski tei-ses klikis, nimetatakse *maksimaalseks klikiks*.

<u>Ülesanne</u>. Olgu antud lôplik orienteerimata graaf G(V,E), kus V on graafi tippude, E kaarte hulk, $|V|=N$. <u>Leida graafist G kôik maksimaal-sed klikid</u>.

Monotoonsed süsteemid: definitsioonid

<u>Definitsioon 1.</u> Graafi mingi tipu Y naabertippu-dele vastavat seosmaatriksit nimetame *väljavô-tuks* selle tipu järgi (tipp Y väljavôttu ei kuulu).
Tippu Y, mille alusel tehakse väljavôtt, nimeta-takse *juhttipuks*.

<u>Definitsioon 2.</u> Olgu antud graaf G ja talle vas-tav seosmaatriks X. Oletame, et oleme sellest teinud mingi tipu järgi väljavôtu. See väljavôtt kirjeldab graafi G alamgraafi G_1, $G_1 \subset G$. Tähistame talle vastava seosmaatriksi X_1, $X_1 \subset X$.
Nüüd vôime teha väljavôtu seosmaatriksist X_1. Tähistame vastavat seosmaatriksit X_2, $X_2 \subset X_1 \subset X$ ja alam-graafi G_2, $G_2 \subset G_1 \subset G$.
Sedamoodi jätka-tes formeerime *väljavôttude jada* $X_f \subset ... \subset X_t \subset ... \subset X_2 \subset X_1 \subset X$, $f \leq N-1$.

Igale väljavôttude jadale vastab kindel *juhttip-pude jada* Y, Y_1, Y_2,...,Y_{f-1}.

Seosmaatriksit X_t nimetame edaspidi *välja-vôtuks tasemel t*, $0 \leq t < N$.

Juhttippu, mille alusel on tehtud väljavôtt
$X_{t+1} \subset X_t$ nimetame *juhttipuks tasemel t*.

Edaspidi nimetame graafile G vastavat seosmaatriksit X väljavôtuks tasemel

0 ja tähistame X_0.

Definitsioon 3. Tippu, mida pole tasemel t valitud juhttipuks, aga kôik väljavôtus X_t sisal-duvad maksimaalsed klikid, milles ta osaleb, väljastatakse algoritmi töö käigus kuni back-trackinguni sellele tasemele t, nimetame *ammenduvaks tipuks tasemel t*.

Definitsioon 4. Oletame, et oleme jôudnud väljavôtuni X_{t+1}. *Keelatud tipuks* nimetame tippu Z, mis on osalenud suvalises eraldatud maksi-maalses klikis (s.t. teda on vôrreldud selle kliki kôikide tippude suhtes) ja ei kuulu jooksvasse juhttippude jadasse Y_0, Y_1,..., Y_t .

Kôiki ülejäänud tippe *nimetame lubatud tippudeks*.

Definitsioon 5. Mingi tipu Y suhtes *lubatud tippudeks* nimetame Y naabertippe, mille suhtes teda veel vôrreldud pole.

Teoreemid

<u>Teoreem 1.</u> Kui mingi tipu Z korral $FT_{t+1}(Z)+1 =$
$= FT_t(Z)$, siis Z on ammenduv tipp tasemel t.

<u>Teoreem 2.</u> Algoritmis A1 igale väljavôtule X_t vastab R- tipuline klikk $\{Y_0, Y_1, ..., Y_{t-1}, U\}$, kusjuures see klikk on X_0 suhtes maksimaalne, kui

1) tipu U sagedus väljavôtus $X_t = 0$, siis $R=t+1$

vôi

2) väljavôtus X_t kôigi mittenullise sagedusega tippude j (nende arv $A \le N_t$) sagedus $FT_t(j)= A -1$ (nn "reegel n-1"). Sel juhul $U = \{j\}$, $R = t + |U|$.

<u>Teoreem 3.</u> Juhttipu Y_t suhtes, mille alusel teostati väljavôtt X_{t+1}, eraldatakse kôik maksi-maalsed klikid, mis sisalduvad väljavôtus X_t.

<u>Järeldus 3.1.</u> Valinud juhttipu Y_t , vôime nullida tema sageduse väljavôtus X_t enne, kui tema suhtes kôik maksimaalsed klikid väljavôtus X_t on väljastatud.

<u>Teoreem 4.</u> Algoritmis A1 kasutatav tehnika välistab kord juba eraldatud maksimaalse kliki korduva väljastamise.

<u>Teoreem 5.</u> Oletame, et oleme valinud väljavôtul X_t juhttipuks tipu Y_t. Kui Y_t alusel tehtud väljavôtul $X_{t+1} \subset X_t$ esineb vähemalt üks keelatud tipp j, millel kôik klikid on väljastatud, ja millel 1) $FT_{t+1}(j) = N_{t+1}$ ja

2) mis on jooksva väljavôttude jada $X_{t+1} \subset X_t \subset X_{t-1} \subset ... \subset X_1 \subset X_0$ aluseks olnud juhttippude Y_t , Y_{t-1} , Y_{t-2} ,...,Y_0 naabertipuks, on tegemist juba väljastatud maksimaalse kliki alamkliki eralda-misega.

Millal teha eraldatava kliki kordumatuse kontrolli?

<u>Teoreem 6.</u> Formeeritav juhttippude jada, mis sisaldab lubatud tippu, vastab veel eraldamata maksimaalsele klikile.

<u>Teoreem 7.</u> Kui tasemel null leidub tipp, mis lubatud naabreid ei oma, aga mille kaal#0 ja mille korral ei leidu keelatud tippe, mis oleks tema ja ta väljavôtu kôikide tippude naabriks, siis graafis on veel väljastamata maksimaalseid klikke.

Kõikide maksimaalsete klikkide eraldamise algoritm

S1. t:=0

S2. Arvutada kaalud

S3. Kliki maksimaalsuse kontroll

3.1. Kas kaal=0?

3.2. Kas rakendub “Reegel n-1”?

S4. IF kõik kaalud = 0, THEN (t:=t-1; IF t= -1 THEN mine LOPP ELSE mine 3.2)

S5. Valida juhttipp, elimineerida see

S6. t:=t+1; Teha väljavõtt, arvutada kaalud

S7. Tagasivõrdlus. (IF rakendub THEN elimi-neerida vastavad tipud tasemel t-1)

S8. Eraldatava kliki mittemaksimaalsuse kontroll. IF eraldatav klikk ei tule maksimaalne THEN (t:=t-1; mine 3.2)

S9. Mine S3

KMK: MONS-algoritmi optimeerimine

<u>Definitsioon 6.</u> Tippu, mille suhtes on kôik klikid eraldatud, nimetame *ammendatud* tipuks.

Kôiki ülejäänud tippe nimetame *vabadeks* tippudeks.

<u>Definitsioon 7.</u> Vaba tippu, mis pole valitud jooksva ahela juhttipuks ja mis ei kuulu välja-vôttu X_t, nimetame *otsustustipuks tasemel t*.

<u>Teoreem 8.</u> Väljavôtus X_t seotud tipupaari vahe-lise kaare vôime elimineerida väljavôtust X_{t-1} parajasti siis, kui tasemel t ei leidu neile ühist otsustustippu väljavôtust X_{t-1}.

<u>Teoreem 9.</u> Väljavôtu X_t mingi tipu ja sellele väl-javôtule vastava juhttipu Y_{t-1} vahelise kaare vôib elimineerida kôikidel tasemetel < t parajasti siis, kui nad ei oma ühist otsustustippu tasemel t.

<u>Teoreem 10.</u> Väljavôtu X_t juhttipu Y_{t-1} ja tipu, mis omavad ühist otsustustipust naabrit U, vahelise kaare tohib elimineerida kôikidelt tasemetelt t-i, $0<i<r$, kus r on taseme number, millel tipp U muutus otsustustipuks.

<u>Teoreem 11.</u> Oletame, et oleme tasemel t ja käsit-leme tippude a ja b vahelise kaare (a,b) eliminee-rimist, kusjuures oleme fikseerinud kôik tippude a ja b ühised vabad naabertipud {j}, {j}#∅. Kaart (a,b) ei tohi elimineerida, kui hulga {j} tippudele vastavas graafis G_j G leidub maksimaalne klikk T, T#{Y_0, Y_1,...,Y_{t-1}}, mille kôik tipud ei oma ühist ammendunud tippu tippudega a ja b.