Klikk ja tuum

<u>Definitsioon B1.</u> *Monotoonseks süsteemiks* nimetatakse paari $<V, \pi>$, kus V on mingi lôplik hulk ning π: V x $P(V) \rightarrow R$ on kujutus, mis rahuldab järgmist nn. monotoonsuse tingimust:

$$A \subseteq B \Rightarrow \pi(c,A) \leq \pi(c,B),\ c \in V.$$

Kujutuse π abil saab defineerida teise kujutuse $\varphi : P(V) \rightarrow R$ järgmiselt:

$$\varphi(A) = \min\{\pi(c,A) \mid c \in A\}.$$

Kujutust φ nimetatakse monotoonse süsteemi *miinimumfunktsiooniks*.

<u>Definitsioon B2.</u> Monotoonse süsteemi *suuri-maks tuumaks* nimetatakse sellist alamhulka $A \subseteq V$, mille korral miinimumfunktsioon saavutab globaalse maksimumi. Tähistame seda $T(A)$:

$$T(A) = \forall B(\varphi\ (B) \leq \varphi(A)).$$

<u>Definitsioon B3.</u> Monotoonse süsteemi *nôrgaks tuumaks* nimetatakse sellist alamhulka $A \subseteq V$, mille korral miinimumfunktsioon saavutab lokaalse maksimumi. Tähistame seda $K(A)$:

$$K(A) = \forall B(\varphi\ (AU\{B\}) \leq \varphi(A)).$$

Järgnevalt eeldame, et $\pi(c,V) = \deg c$, s.t. kaalufunktsiooniks on tipu c valents.

<u>Teoreem B1.</u> Maksimaalne klikk on ühtlasi ka minimaalne ($\subseteq$ môttes) nôrk tuum.
<u>Tôestus.</u> Kui A on maksimaalne klikk suurusega M, siis ükski tipp $c \notin A$ ei saa olla seotud hulga A kôikide elementidega, sest muidu poleks A maksimaalne klikk. Järelikult pole vôimalik, et $\varphi(AU\{c\}) > \varphi\ (A)$.
Mott.

Vastupidine väide, et minimaalne nôrk tuum on klikk, alati ei kehti.

<u>Teoreem B2.</u> Suurima kliki vôimsus on alati väiksem vôi vôrdne arvuga φ (W), kus W on suurim tuum.
<u>Tôestus.</u> Kui A on suurim klikk, siis $\varphi\ (A) = |A|$. Kui B on suurim tuum, siis $|A| = \varphi\ (A) \leq \varphi\ (B)$.
Mott.

Kuna suurima tuuma leidmine J. Mullati järgi on polünomiaalse keerukusega, siis see teoreem vôimaldab môningatel juhtudel eitavalt vastata küsimusele: kas graafis leidub mingi etteantud suurusega klikk. See ülesanne on aga teatavasti NP-täielik.